Иллюзия кривизны

Исследование искривлённых пространств является весьма популярной темой. Но следует заметить, что собственно *понятие* пространства определено несколько расплывчато. Во многих публикациях в роли пространства рассматриваются явно конечные геометрические *объекты*. Например, сферу практически всегда называют двухмерным пространством положительной кривизны. Пространства отрицательной кривизны Лобачевского изображаются множеством различных фигур. Поверхности цилиндра и конуса признаны в общем случае плоскими *пространствами*, иначе говоря, обычным пространством Евклида. При таком подходе мы можем назвать пространством вообще любое геометрическое или физическое тело. Например, куб, определённо выглядит как плоское евклидово пространство. Всевозможные пирамиды, тетраэдры, октаэдры и прочие многогранники, лента Мёбиуса и, разумеется, бутылка Клейна – все эти конечные физические *тела* можно назвать пространством.

Однако всё-таки следует различать *пространство* и геометрический *объект*. Дать определение пространству, которое устроило бы всех, видимо, невозможно. Чем же кардинально различаются объекты и пространство? Пожалуй, самым очевидным различием является то, что *пустое* пространство характеризуется *измерениями* и координатной *сеткой*, а объект – своими геометрическими размерами *внутри* пространства, в его координатной сетке. Заметим, что формально нанести координатную сетку можно и на любой геометрический объект. Но нередко на некоторых из них такая сетка получается довольно противоречивой. Зачастую противоречиво само понятие координат. Ортогональные координатные линии на некоторых "простран-

ствах" переходят друг в друга, а сами линии пересекают себя [79]. Задать координаты точки в такой системе весьма непростая задача. Отнесение того или иного геометрического образования к *пространству* или простому объекту в пространстве чаще всего производится, что называется, на вкус *исследователя*.

Пожалуй, самым фундаментальным, непротиворечивым, всеобъемлющим и, возможно, единственным *приемлемым* представителем пространства является пространство Евклида. Любое иное пространство можно рассматривать как вложенное в пространство погружения – многомерное пространство Евклида. Само же это пространство Евклида в других пространствах зачастую обозначается присутствующим лишь фрагментарно, в предельном, урезанном варианте. Из этого можно сделать ещё одно наблюдение: любое *замкнутое* пространство перестаёт быть таковым, превращается в конечный геометрический *объект* в евклидовом пространстве.

Вместе с тем, кривизна пространства – это характеристика, которая может относиться как к геометрическим объектам, так и к *плоским* эквивалентам пространства Евклида. Известны пространства, которые условно можно назвать "мятыми". Такое пространство можно получить, просто изогнув, сложив, смяв евклидову плоскость без растяжений и разрывов. Условные обитатели такого "мятого", в частности, двухмерного пространства так и будут воспринимать его: как евклидово *плоское* пространство. Никакими наблюдениями и измерениями типа параллельного переноса вектора или вычисления суммы углов треугольника они не смогут обнаружить изгибы, смятость своего пространства. Оно и на самом деле *внутренне* плоское. Увидеть его изгибы можно только из пространства погружения большей размерности [74]. Другими словами,

собственно кривизна, внутренняя кривизна *пространства* отличается от кривизны *объекта*, кривизна *поверхности* которого определяется *внешним* взглядом. Кривизна пространства с точки зрения его обитателей, *внутренняя* определяется тем, какую координатную сетку в нём нанести. Отождествление пространства и объекта ведёт к тому, что реально *плоское* пространство может быть *диагностировано* как искривлённое.

Логарифмическая система координат

Вероятно, одним из первых способов *кажущегося* искривления плоского двухмерного пространства является использование логарифмической сетки координат. Довольно просто показать, что при переводе евклидовой плоскости в логарифмическую систему координат, искажаются как кривые, так и прямые линии. Это хорошо видно на примере треугольника.

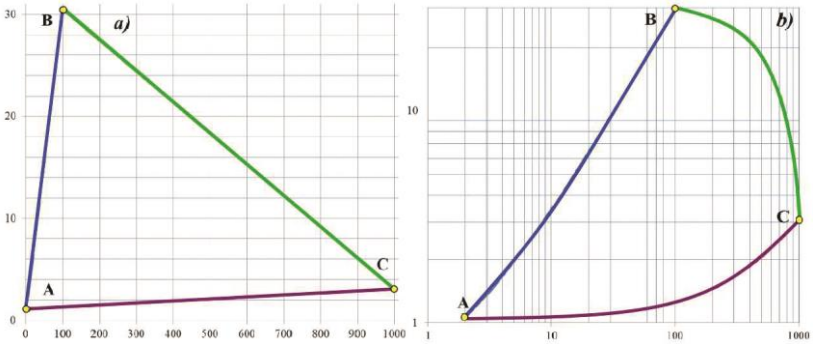


Рис.1. Треугольник в a) обычной декартовой и b) двойной логарифмической системах координат

Треугольник нанесён на поверхность в декартовых координатах, а после перевода их в двойные логарифмические форма треугольника визуально изменилась. Двойные логарифмические координаты – это логарифмические

координаты по обеим координатным осям. Навскидку можно оценить сумму углов треугольника ABC на рис.1b. Одна из его сторон, сторона AB близка к прямолинейной, но две другие – значительно выгнуты наружу. Это значит, что углы B и C превышают таковые, если бы все стороны были прямолинейными. Следовательно, сумма углов треугольника явно превышает 180 градусов. Внутренний, двухмерный наблюдатель должен диагностировать это пространство как пространство положительной кривизны. Для наглядности покажем, что прямые линии при логарифмическом преобразовании координат искривляются в общем случае

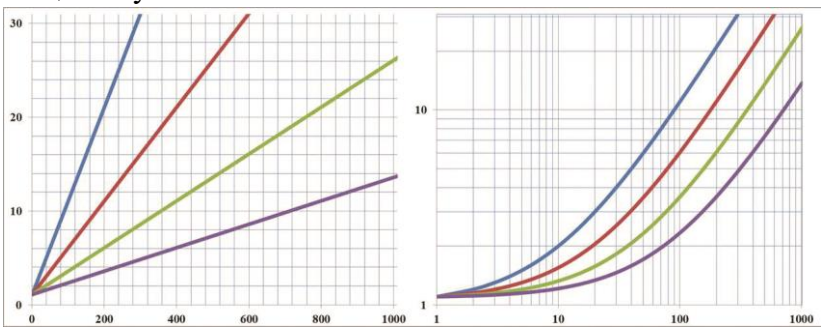


Рис.2. При переходе от a) декартовой системы координат к b) двойной логарифмической системе прямые линии искривляются

То, как изменяется форма кривых при преобразовании линейных декартовых координат в двойные логарифмические, покажем на примерах окружностей. Для этого построим на поверхности рис.3a окружность, описываемую уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2$$

В логарифмических координатах такое построение невозможно, поскольку переменные в уравнении могут принимать нулевые значения. Поэтому для последующего

преобразования рисунка в логарифмические координаты используем другое уравнение окружности: с центром, смещённым относительно начала координат

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

$$(y-y_0)^2=R^2-(x-x_0)^2$$

$$y-y_0=\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$$

$$y=y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$$

Для перехода на логарифмическую шкалу при любых положительных значениях смещения центра круга $x_0 \geq$ R и $y_0 \geq$ R, дополнительно смещаем его от осей координат на единицу, то есть, уходим от нулевых и отрицательных значений:

$$y=1+y_0+\sqrt{R^2-(1+x-x_0)^2}$$

Также дополнительно наносим на диаграмму несколько радиусов круга, которые в дальнейшем будем рассматривать как меридианы. После преобразования координат рис.3a в двойные логарифмические координаты получаем окружность рис.3b, которая выглядит как криволинейный объект.

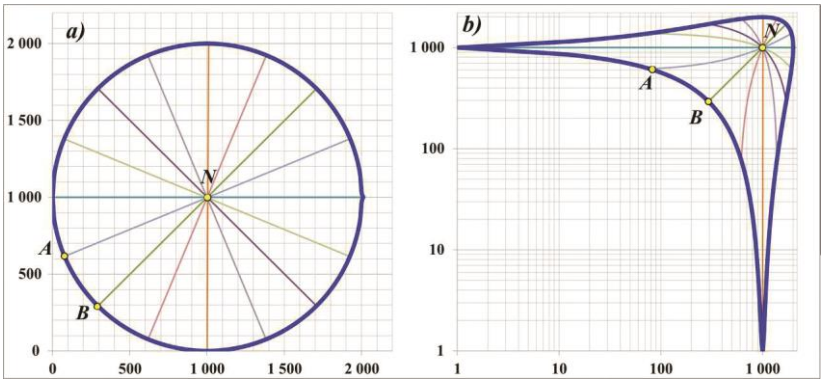


Рис.3. Окружность в двойной логарифмической системе координат

Если *признать* плоскость рисунка деформированной, сжатой евклидовой плоскостью, то параллельный перенос вектора по изображенному замкнутому контуру, по внешней линии, не являющейся геодезической, вернёт его с *неизменным* направлением. Казалось бы, это объективное доказательство плоскости, особенно, учитывая ортогональность линий координатной сетки. Но если мы *объявим*, что данная поверхность – криволинейная, причём изображённая на ней линия – геодезическая, то параллельный перенос будет невозможен. Ортогональные линии в этом случае следует *объявить* криволинейными, как параллели на сфере. Теперь возможен только эквиугловой перенос. На искривлённой поверхности такой перенос вектора вдоль замкнутой геодезической также не приводит к его повороту, то есть, и это допущение окажется корректным.

Фигуру на рис.3a мы можем рассматривать как вид на Землю со стороны северного полюса. Контур фигуры – это экватор Земли, а радиальные линии – некоторые меридианы. Хорошо видно, что любой треугольник, например, треугольник ANB на рис.3a имеет традиционную сумму углов, превышающую 180 градусов. То есть, эта поверхность является пространством положительной кривизны. Однако эта же фигура в логарифмических координатах на рис.3b имеет свойства пространства отрицательной кривизны. Тот же самый треугольник ANB явно имеет сумму углов, меньшую 180 градусов. То есть, в этих координатах поверхность Земли выглядит как пространство отрицательной кривизны. При этом для внутреннего, плоского наблюдателя это пространство по-прежнему является евклидовой плоскостью, многообразием с нулевой кривизной, то есть, *плоским* многообразием.

Квалифицировать действительный характер кривизны поверхности можно лишь двумя способами: *декларировать*

вид объекта в пространстве погружения в виде некоего объёмного тела и кривизну его поверхности, либо изначально *объявить* какую-либо кривизну этого пространства на плоскости. Все последующие процедуры – измерение углов треугольников и переносы векторов однозначно предопределяются этими *исходными* постулатами.

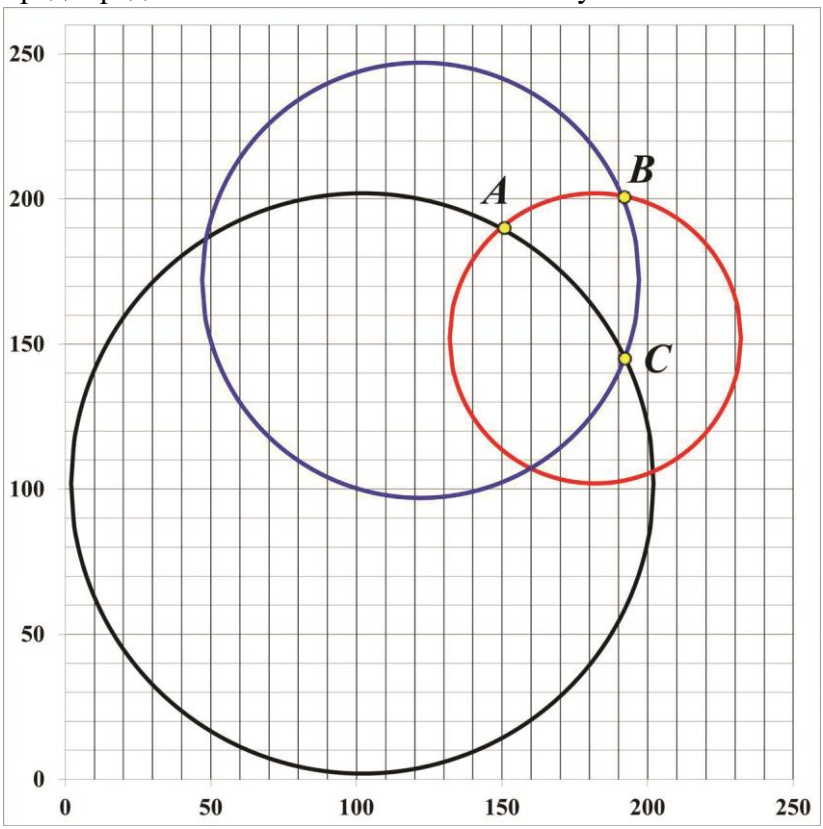


Рис.4. Три пересекающиеся окружности

Для последующих исследований построим на плоской двухмерной поверхности три окружности на рисунке рис.4, описываемые обобщенными уравнениями

$$x_i^2 + y_i^2 = R_i^2$$

Как и в предыдущем случае для перехода на логарифмическую шкалу дополнительно смещаем эти окружности от осей координат на единицу: от нулевых и отрицательных значений. Для этого к каждой из координат добавляем фиксированное смещение с нулевыми индексами:

$$y_i = 1 + y_{0i} + \sqrt{R_i^2 - (1 + x_i - x_{0i})^2}$$

Три исходные пересекающиеся окружности мы построили в декартовых координатах. Повторим, что в этом плоском двухмерном пространстве окружности по определению геодезическими не являются.

Преобразуем, как и выше, эту исходную декартову систему координат в двойную логарифмическую. Видим, что построения выполнены корректно и в преобразованной, логарифмической системе координат мы получили криволинейный треугольник ABC. Поскольку на рис.5b отсутствуют координатные линии, мы можем *принудительно* установить характер многообразия: признать его плоским или искривлённым. Это допустимо при традиционном отказе от пространства погружения [42, т.1, с.411], [31, с.108], согласно которому считается, что внутренний "двухмерный" наблюдатель и без его учёта сможет определить кривизну своего пространства. Однако при отсутствии координатной сетки, сетки из геодезических неопределённым становится вопрос: какие именно линии для него являются геодезическими.

С плоским многообразием особых проблем не возникает: параллельный перенос на нём допустим по любым линиям, как геодезическим, так и произвольным, искривлённым. В обоих случаях вектор вернётся после обхода замкнутого контура в исходную точку без поворота. Но эквиугловой перенос вектора вдоль произвольной, не геодезической линии в таком пространстве недопустим: в процессе переноса вектор в общем случае испытает пово-

рот. Напротив, если мы *постулируем* кривизну этого пространства, то невозможным станет уже параллельный перенос [74]. Кроме этого мы также *постулируем*, что изображённые на рисунке рис.5 линии являются геодезическими. Иначе мы не имеем вообще никакой возможности говорить о переносе вектора. Если же эти линии – геодезические, то разрешён эквиугловой и только эквиугловой перенос. И в этом случае мы неизбежно, однозначно констатируем: многообразие искривлено, как мы, собственно, и постулировали.

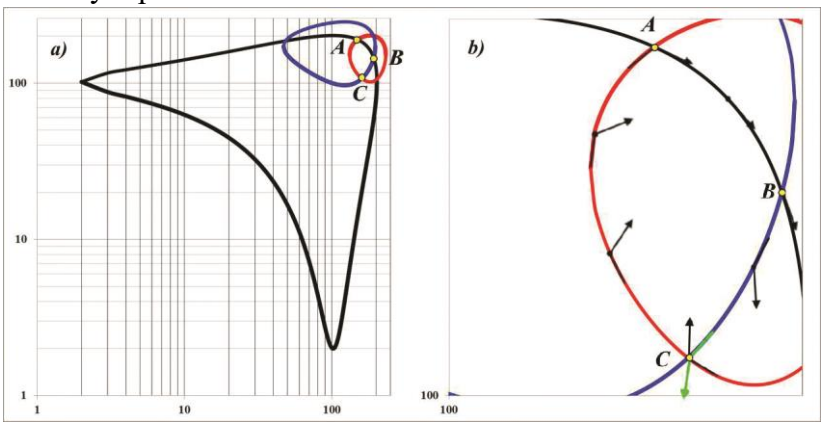


Рис.5. Три пересекающиеся окружности в двойной логарифмической системе координат: a) полный размер; b) увеличенный фрагмент

Связано это с тем, что контур не является неразрывной, единой геодезической. Если контур состоит из разных геодезических, то эквиугловой обход вектором замкнутого контура обязательно приводит к его повороту, как показано на рис.5b. Исходный, черный вектор из точки C перемещён последовательно по трём геодезическим по часовой стрелке с возвратом в исходную точку, в которой он изображён зелёным цветом. Векторам в их началах добавлены короткие отрезки касательных к соответствующей геодезиче-

ской. Угол к каждой геодезической в процессе переноса был неизменным, это эквиугловой перенос. То есть, мы вновь получили подтверждение нашему постулятивному определению многообразия как искривлённого.

Судить о кривизне пространства, представленного на евклидовой плоскости в виде криволинейных фигур и даже в виде аксонометрии можно не всегда. Как правило, возникает неопределённость: одна и та же фигура достаточно корректно может рассматриваться и как искривлённое, и как плоское, евклидово двухмерное многообразие. Таким образом, как мы уже отметили выше, характер многообразия определяется априорно, некими условиями, которые до всех измерений уже *назначают* пространству характеристики кривизны.

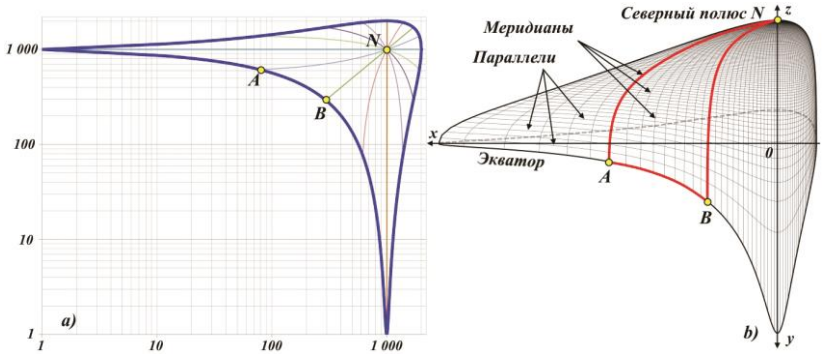


Рис.6. Аксонометрия логарифмического пространства – b) и её проекция вдоль вертикальной оси – a)

Окружность в декартовых координатах, изображённая выше на рис.3а, после преобразования координат в логарифмические сразу же превращается в сильно искривлённую фигуру. Тем не менее, эта фигура по-прежнему является плоским двухмерным многообразием, поскольку *находится* на евклидовой плоскости. И таковым, плоским многообразием они, окружность рис.3а и фигура рис.6а,

воображаемая аксонометрия этой окружности, будут оставаться до тех пор, пока мы явным образом не *объявим* их многообразиями искривлёнными и не предоставим доказательство этого. Двухмерное многообразие может быть искривлённым тогда и только тогда, когда оно находится в пространстве погружения более чем с двумя измерениями и при этом само является поверхностью объекта, как минимум, трехмерного. Иначе говоря, фигуры в нашем случае являются поверхностями трёхмерных объектов: фигура на рис.3a – это полусфера, а фигура на рис.6 – некая неопределённая, сильно искривлённая, куполообразная фигура, тело. И здесь становится важным априорное знание: эта вторая фигура, вообще-то является линейно преобразованной, деформированной полусферой.

Однако *линейное* координатное преобразование полусферы привело, кроме того, к изменению и параметров её кривизны. Действительно, криволинейны треугольник ANB на полусфере рис.3a, рис.7 и, вероятно, на рис.6b свидетельствует о том, что поверхность имеет положительную кривизну, поскольку сумма его углов превышает два прямых. Напротив, на рис.3b и рис.6a мы, наблюдатели из пространства погружения видим, что эти проекции определённо являются двухмерными многообразиями *отрицательной* кривизны: сумма углов этих треугольников явно меньше двух прямых. При этом, условный наблюдатель, обитатель этой двухмерной поверхности определит сумму углов как на полусфере – больше двух прямых.

Двухмерная сферическая поверхность является наиболее простым и практически однозначным вариантом пространственной кривизны. Тем не менее, практически всегда при исследовании линий, геодезических на этой поверхности с полной определённостью указывается, что это именно *сферическая* поверхность. Если же такой

ссылки на сферичность нет, то двусмысленность неизбежна [74, рис.2.2], [65, рис.13].

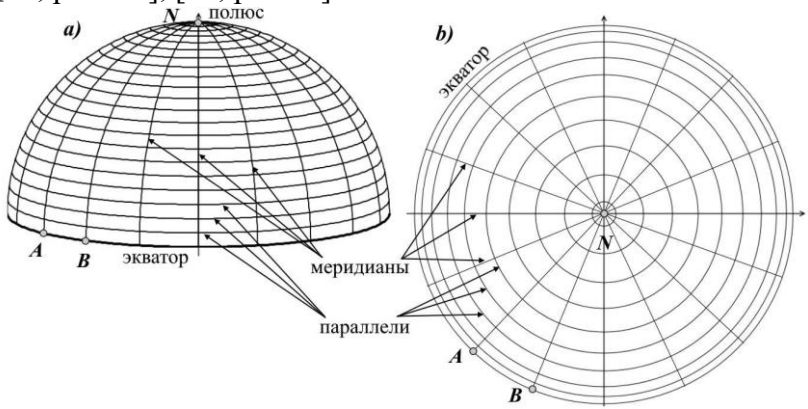


Рис.7. Вид на Землю с нанесёнными на неё параллелями и меридианами со стороны северного полюса

Все исследования поверхности *шара* опираются на наше *изначальное, априорное* знание о том, что эта поверхность *искривлена*. Однако поверхность шара может быть деформированной *евклидовой* плоскостью, то есть, для внутреннего наблюдателя быть, вернее, казаться многообразием *плоским*.

Диаграммы Картера-Пенроуза

Приём изменения характеристик координатной системы, сжатия пространства путём разбиения осей на произвольные отрезки используется довольно часто. Как правило, главной целью, как и в случае логарифмического сжатия осей, является стремление расширить охватываемую область пространства на ограниченной поверхности листа, экрана, вывести на неё как можно больше графической информации. Одним из таких сжатых пространств являются диаграммы Картера-Пенроуза. Используется ограниченная, конечная область, поверхность четырёх-

угольника – квадрата или ромба, являющегося на самом деле квадратом, поставленным на одну из вершин. В эту ограниченную область "втискивается" полностью вся бесконечная евклидова *плоскость*. Диаграммы используются в космологии, поэтому принимается, что горизонтально расположены координатные линии времени, а вертикально – радиусы каких-либо космологических объектов, обычно – нейтронных звёзд или Чёрных дыр. То есть, фактически диаграмма является четырёхмерной системой координат.

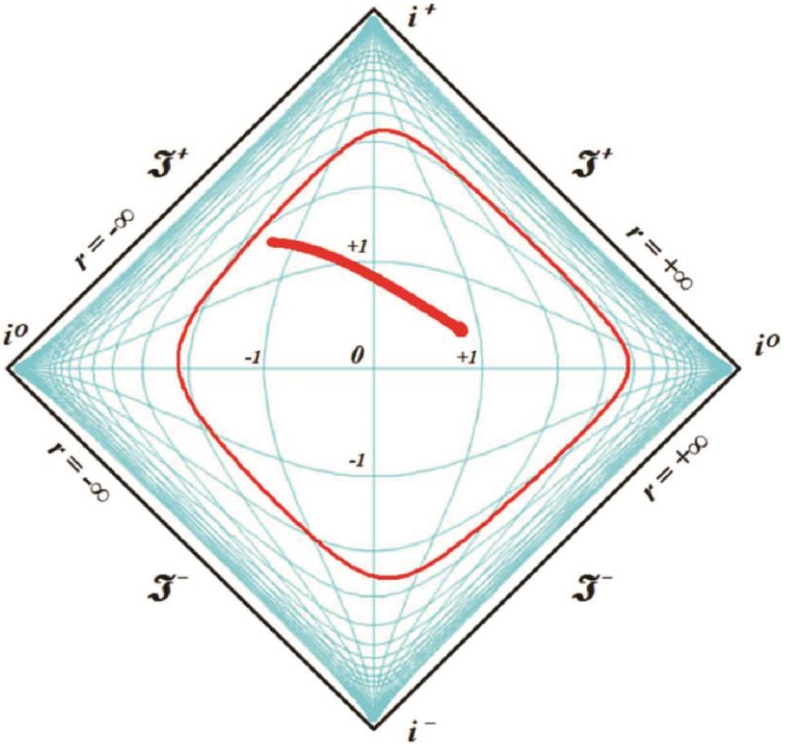


Рис.8. Анимированная диаграмма Пенроуза: окружность с вращающейся внутри стрелкой [81]

Вместе с тем, диаграмма является также и очевидной *двухмерной* плоскостью. Горизонтально в этом случае мы

традиционно устанавливаем ось абсцисс *x*, а вертикально – ось ординат *y*. Используя такие обозначения, мы можем построить на "перепрофилированной" диаграмме объекты *любых* размеров, вплоть до бесконечных. Понятно, что такая компрессия осей приводит к соответствующему визуальному искажению, деформации объектов. Например, окружность с вращающейся внутри стрелкой выглядит, как показано на анимации [81] к рисунку рис.8. Окружность на рисунке выглядит как криволинейный, овальный четырёхугольник, а прямая стрелка в процесс вращения постоянно изгибается в разные стороны. Несмотря на это, по определению и по способу формирования диаграмма является *плоским* двухмерным многообразием. Подчеркнём: исключительно "по определению и способу формирования". Если они нам неизвестны, то вновь возникает дилемма: характер кривизны многообразия *определяет, задаёт, постулирует* сам исследователь.

Для наглядности покажем, как *евклидова* плоскость диаграммы Пенроуза может рассматриваться как *искривлённая* поверхность. Подчеркнём: изначально диаграмма Пенроуза имеет "плоский", евклидов характер. Если за декартовы координаты на диаграмме принимать номера линий, то мы получим всю целочисленную ось, при этом визуальная её длина равна 2, если использовать разбиение оси по обратным степеням двойки. На обычной, тангенциальной диаграмме Пенроуза длина каждой *производной* оси, стороны квадрата равна 2π, и она также номерами линий охватывает всю целочисленную ось. Несложно заметить, что, как и в рассмотренном выше случае логарифмической системы координат, при *назначении* пространству нулевой кривизны, параллельно перенесённый вектор обойдёт замкнутый контур без поворота. Но и постулирование *ненулевой* кривизны также найдёт подтверждение этому посту-

лату. Вектор вернётся после обхода контура в исходную точку с поворотом. Как и выше, чтобы судить о характере искривления многообразия мы неизбежно *обязаны* использовать некоторую априорную информацию, фактически определяющую искривлённость многообразия.

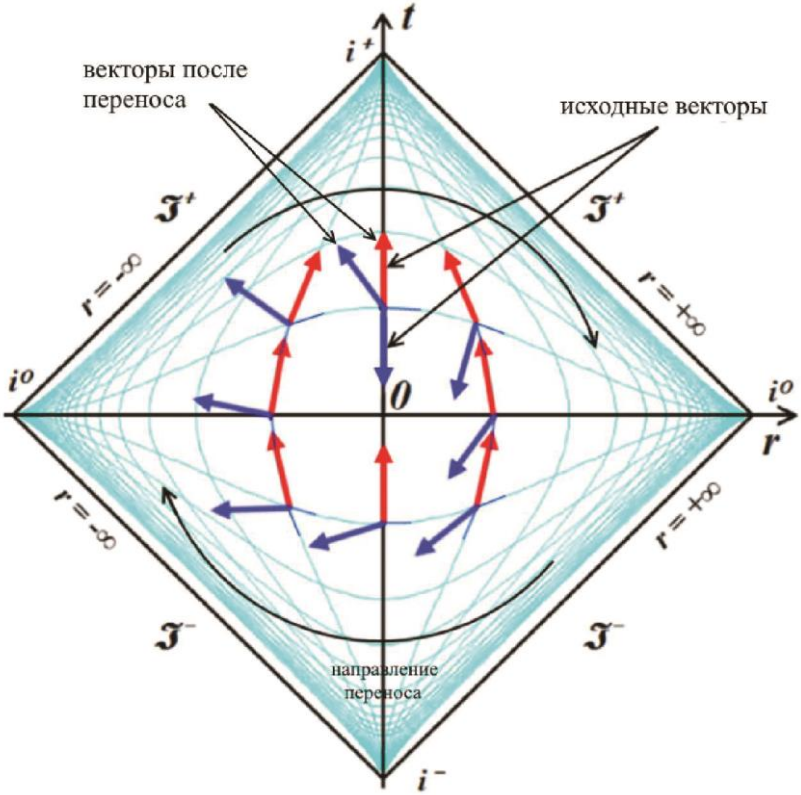


Рис.9. Диаграмма Пенроуза [78] может рассматриваться как плоское, так и как искривлённое двухмерное многообразие

С одной стороны диаграмму на рис.9 можно трактовать как плоское многообразие. В этом случае вектор (красный) можно *параллельно* переносить по замкнутому контуру, квадрату. В исходную точку он возвращается без поворота. Эквиугловой перенос вектора также не приводит

к его повороту, но демонстрация на рисунке такого переноса является довольно сложной процедурой, поэтому мы его не приводим.

С другой стороны, эту же диаграмму можно трактовать и как искривлённое двухмерное многообразие с геодезической координатной сеткой. Параллельный перенос вектора в этом случае *невозможен* [74]. Эквиугловой перенос по замкнутому контуру с сохранением угла между вектором и линией переноса приводит к повороту вектора (синий) в конечной точке относительно его исходного направления. Для демонстрации, большей наглядности эквиуглового перемещения синих векторов, в их начала добавлены отрезки касательных к линии переноса, с которыми вектор и образует этот неизменный угол. В точках перехода с одной геодезической на другую таких касательных отрезков два, по одному к каждой геодезической в точке их пересечения.

Отметим, что принцип построения диаграмм Пенроуза, *компрессия* осей, сжатие используемого в них пространства, в равной мере относится и к диску Пуанкаре и гравюрам Эшера, хотя в частных деталях между ними могут быть и различия. У диаграмм Пенроуза базовым принципом является использование шкалы с компрессией, использующей функцию арктангенса. Заметим, что такого же эффекта сжатия пространства можно достичь использованием любой функции, имеющей *бесконечный* диапазон определения и *конечный* диапазон изменения. Рассмотрим одну из таких функций компрессии, отчасти похожей на гиперболическую функцию

$$n = \frac{x}{x+2} \qquad m = \frac{y}{y+2} \qquad (1)$$

Параметры *n* и *m* в уравнениях имеют *конечные* диапазоны изменения при *бесконечных* диапазонах изменения переменных *x* и *y*. Величина 2 в знаменателе имеет смысл параметра компрессии и взята такой величины произвольно. С ростом исходных координат некоторой точки *x* и/или *y* от 0 до бесконечности, их эквиваленты на диаграмме, параметры *m* или *n* принимают, соответственно, значения от 0 до 1. В качестве демонстрации, используя верхнее уравнение системы (1), построим координатные линии оси абсцисс:

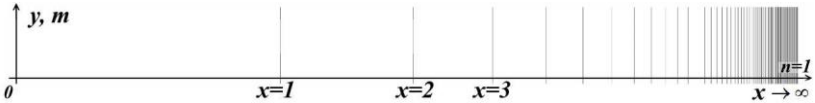


Рис.10. Координатная ось x с коэффициентом сжатия, равным 2. Используется для построения подобия диаграммы Пенроуза

Далее на диаграммах реальную *x*-координату, абсциссу выводимой точки мы будем обозначать новым, временным символом s. Переменная *x* в этих уравнениях на диаграмме приобретает смысл сжатой, компрессированной абсциссы и заменяет ранее использованную в (1) переменную n. Здесь, как видим, по переименованной координате *x* шкала изменяется довольно резко, поэтому изменим, увеличим до 10 параметр компрессии и также увеличим до 10 размер оси абсцисс

$$x = \frac{10s}{s+10} \qquad (2)$$

Теперь скорость уменьшения шага координатных линий по оси абсцисс приобретает более плавный характер, как показано на рисунке рис.11. На этом рисунке крайние правые координатные линии показаны условной штриховкой, поскольку они идут настолько часто и близко друг к другу, что сливаются в сплошное чёрное поле. Диа-

граммная координата n на рисунке рис.10, изменяется в пределах от -10 до +10, хотя показана только её положительная часть, причём линии расположены более равномерно, чем на традиционной, базовой диаграмме Картера-Пенроуза.

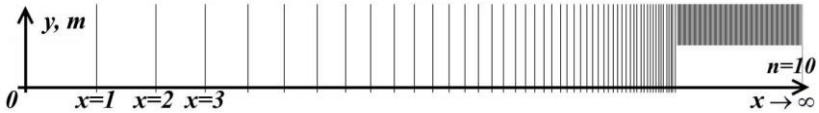


Рис.11. Координатная ось x с коэффициентом сжатия, равным 10. Используется для построения подобия диаграммы Пенроуза

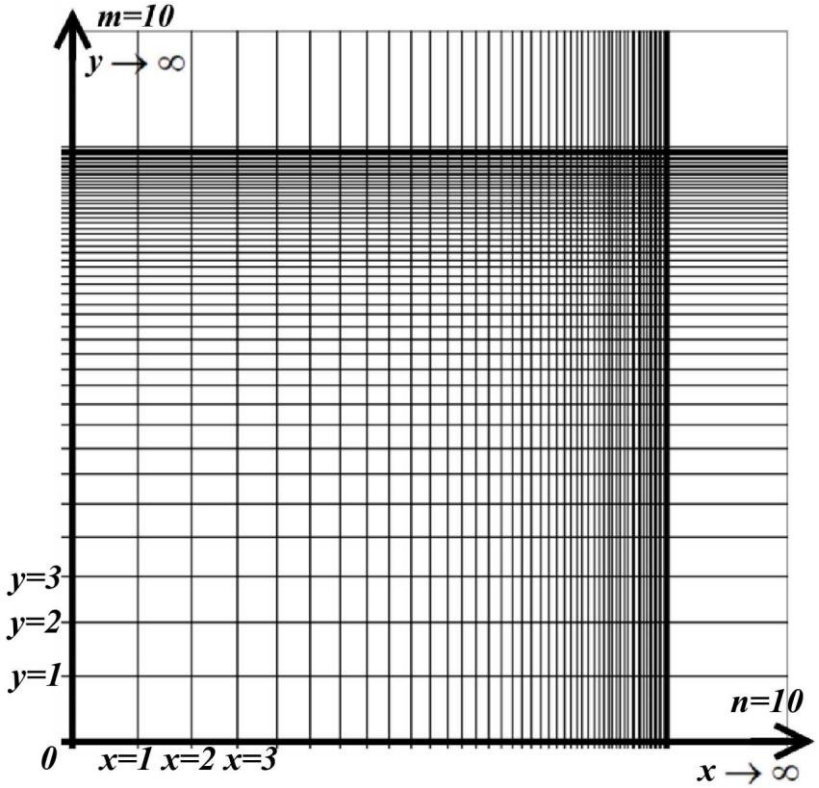


Рис.12. Исходная координатная сетка для построения подобия диаграммы Пенроуза в I-квадранте с коэффициентами сжатия осей, равными 10

Уравнение компрессии оси ординат имеет такой же вид (2). Полная координатная сетка (x, y) в первом квадранте приведена на рисунке рис.12, на котором предельные линии не показаны по указанной выше причине. Используя этот фрагмент сетки, дополняем диаграмму ещё тремя областями – квадрантами со II по IV. На полученной координатной сетке "вручную", по точкам построим набор *прямых* линий, наклонённых под 45 градусов. Уравнение таких линий имеет вид

$$m = n + k \qquad (3)$$

Используем несколько выбранных наугад значений k. Сначала строим четыре симметричные линии: на диаграмме рис.13а они выделены красным цветом.

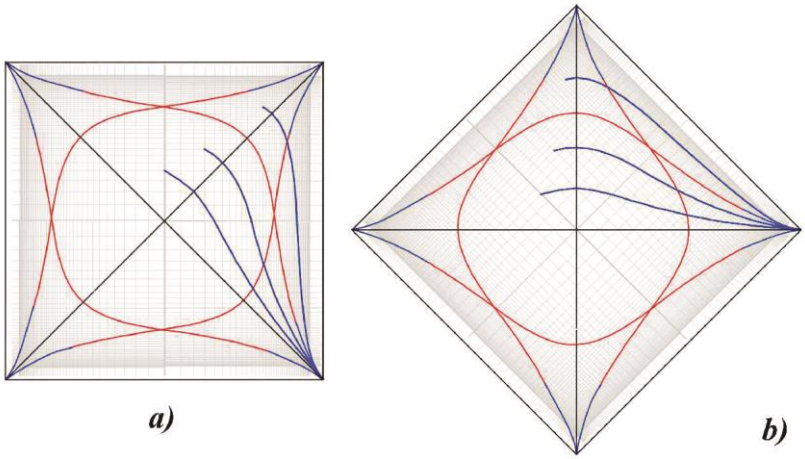


Рис.13. а) Диаграмма с диагональными линиями с углом наклона в 45 градусов в системе координат с коэффициентом сжатия осей, равным 10; b) обмен ролей линий: линии, бывшие координатными, становятся диагональными, а диагональные линии с углом наклона 45 градусов становятся координатными в стиле диаграмм Пенроуза

Поскольку на концах этих линий сетка имеет довольно нечёткий вид, удлиняем их по смыслу до предель-

ных значений, до углов диаграммы отрезками линий синего цвета. Далее добавляем ещё три диагональные линии с углом наклона в 45 градусов, выделенные на рис.13a синим цветом. Линии эти строим укороченными – в I и IV квадрантах. В завершение переводим диаграмму в традиционное положение, когда исходные сжатые оси координат будут расположены под углом 45 градусов к горизонтали: поворачиваем диаграмму рис.13a на 45 градусов по часовой стрелке – рис.13b. Нарисованные нами вручную цветные дугообразные линии теперь визуально приобрели смысл координатных линий точно такой же, как на традиционных диаграммах Картера-Пенроуза, а линии, бывшие ранее координатными, стали *космологическими,* линиями, обозначающими нулевые, светоподобные геодезические. Понятно, что такая "ручная" процедура и трудоёмка и неточна, линии приходится "подправлять" так же, вручную.

Составим уравнения для *программного* построения этих линий, создающих новую координатную сетку. Уравнения в *исходных* координатах для набора линий, имеющих наклон в 45 градусов и период по оси x, равный некоторой величине k, имеют такой же вид, как и (3)

$$y = x + k \qquad (4)$$

Выбираем диапазон изменения параметра $k = 0,1,2,3...100$, то есть, предполагаем построение 100 диагональных линий в исходных координатах, образующих, соответственно, 100 координатных линий в координатах сжатых. Здесь и далее мы принимаем, что параметры m и n в уравнениях (1) и (3) приобрели смысл координат x и y, а исходная переменная x переименована в них в параметр s по оси абсцисс для каждой частной прямой с номером k. С учетом (4), (2) и увеличенных до 10 параметров компрессии и масштабе записываем систему параметрических уравнений в следующем виде

$$x = \frac{10s}{s+10}$$
$$y = \frac{10p}{p+10} \qquad (5)$$
$$p = s + k$$

Параметр s, новое временное обозначение реальной координаты x в (1), изменяется от минус до плюс бесконечности. То же самое относится и к параметру p и координате y. Однако на наших диаграммах мы выбираем существенно более узкий диапазон изменения параметров s и p из-за графических ограничений.

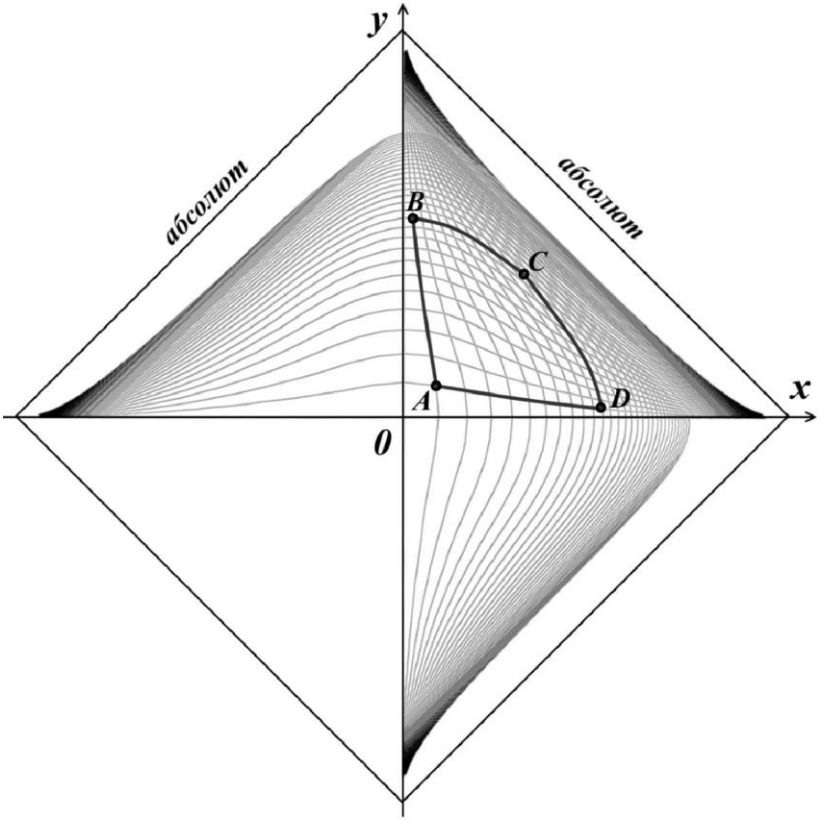


Рис.14. Подобие, аналог фрагмента диаграммы Пенроуза

Можно сказать, что в уравнениях (5) x и y – это фактически *номера* координатных линий на диаграмме. Преобразуем (5) и получаем параметрические уравнения с единственным параметром s

$$x = \frac{10s}{s+10}$$
$$y = \frac{10(k+s)}{k+s+10} \qquad (6)$$

Используя эти уравнения, строим частичную координатную сетку, занимающую два квадранта. Сетка является программным тиражированием красных линий, построенных вручную на рис.13. После её поворота получаем подобие фрагмента диаграммы Пенроуза рисунок рис.14, представляющий собой подобие, аналог фрагмента диаграммы Пенроуза, использующий гиперболическую компрессию координатных осей. Фигура ABCD является квадратом со стороной 20. Стороны диаграммы обозначены как *абсолюты* в духе диска Пуанкаре, то есть, являются бесконечно удалёнными областями.

Кратно опишем алгоритм построения *космологической*, в духе диаграмм Пенроуза, координатной сетки на рис.14. Используя уравнения (6), строим набор линий для некоторых их номеров, учитывая изменение знаков параметров и квадранты нахождения фрагментов линий. В приведённом варианте построены линии с номерами $k = 0...60$ и шагом 2, то есть, построены координатные линии с чётными номерами. Выбран достаточно небольшой диапазон изменения параметра $s = –200...+200$. Как видно на рисунке, крайние, предельные координатные линии отсутствуют. Это, как и выше, сделано ввиду их высокой плотности, вследствие чего они попросту сливаются.

В результате построений получена координатная сетка, которую копируем и поворачиваем вокруг центра на

45 градусов сначала по, затем против часовой стрелки. В конечном счете, получаем набор *x*-линий в квадрантах I и IV, а в квадрантах I и II – набор *y*-линий. Остальные квадранты можно заполнить таким же образом, но для демонстрации в этом нет необходимости. Все стороны квадратной диаграммы обозначены как *абсолюты* в смысле диска Пуанкаре, то есть, это области, бесконечно удалённые от центра квадрата. Также в демонстрационных целях на полученной неполной координатной сетке, в новообразованной системе координат изображён квадрат ABCD, стороны которого выбраны равными 20.

Главное, что следует из произведённых построений – эти преобразования, сжатие координатных осей являются строго *линейными*. Под линейностью здесь мы понимаем следующее. Начало координат диаграммы можно переместить в *любую* точку диаграммы. При этом любая фигура, построенная в какой-либо области диаграммы, будет иметь одни и те же *координатные* размеры в любой другой. Заметим, что при таком преобразовании, сжатии координат углы между линиями не сохраняются: диагональные линии в исходной системе координат параллельны, в деформированной системе они преобразовались в координатную сетку и, хотя и считаются параллельным, но явно таковыми не выглядят.

Выше, исследуя логарифмическую систему координат, мы пришли к выводу, что плоское многообразие лишь тогда и только тогда можно рассматривать как искривлённое, когда у него есть трёхмерный эквивалент, объёмное тело в пространстве погружения. Только будучи проекцией этого тела на плоскость двухмерное многообразие может в некоторых случаях рассматриваться как искривлённое. Для сферы в логарифмических координатах, как

мы показали на рис.6b, такое тело имеет весьма замысловатый вид.

Исходя из этого, делаем обоснованное предположение, что плоские диаграммы Пенроуза и их подобия, так же должны иметь некие трёхмерные объекты, тела, проекциями которых являются эти диаграммы. Эти трёхмерные объекты предопределяют характер кривизны диаграмм.

У трёхмерных производных объектов сечения, параллельные проекции имеют в общем случае криволинейную огибающую. Поскольку аналоги диаграмм Пенроуза имеют квадратную форму, то, очевидно, и внешняя форма образующих их тел также является квадратичной, а вершиной является центр диаграммы. Иначе говоря, это криволинейная пирамида с квадратным основанием.

Выведем уравнения для построения пирамиды некоторой диаграммы. Вершину пирамиды при построениях задаём как начальную точку. Уравнение огибающей берем с соответствующими осям *одинаковыми* коэффициентами сжатия

$$x = \frac{s \times k}{s + k}$$

$$y = \frac{p \times k}{p + k}$$

Используем разработанный ранее алгоритм построения диаграммы, и наносим полученную сетку на каждую из четырёх граней пирамиды сверху вниз или от центра, от вершины к краю. Иначе говоря, мы берём диаграмму за центральную точку и вытягиваем вверх, вдоль новой оси z. На аксонометрии рис.15а мы "положили" пирамиду набок, чтобы просто уменьшить суммарную высоту рисунка. Каждое сечение пирамиды от вершины к основанию – это координатный квадрат диаграммы. Поскольку размеры квадратов увеличиваются "с замедлением", при стыковке

четырёх граней пирамиды они изгибаются. Высота пирамиды стремится к бесконечности, вследствие чего на аксонометрии замечаем две особенности. Форма граней и рёбер имеет вид кривых, асимптотически приближающихся внизу к граням и рёбрам квадрата диаграммы. Параллели пирамиды, её плоские сечения при этом видны нанесёнными равномерно, на одном и том же расстоянии друг от друга. На рисунке рис.15а это видно с некоторой погрешностью, неравномерностью. На проекции пирамиды, на диаграмме эти линии, напротив, располагаются всё ближе и ближе друг к другу. Это связано с эффектом перспективы: линии равномерны, но из-за кривизны поверхности сверху они видны с уменьшающимся интервалом. Подобный эффект очевидно проявляется на всех сжатых поверхностях и их производных объектах, в том числе, на диске Пуанкаре.

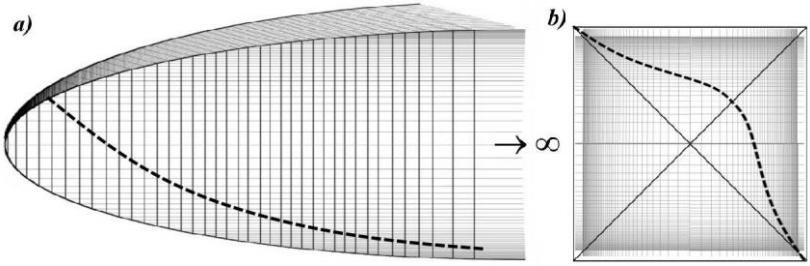


Рис.15. a) аксонометрия криволинейной квадратной "пирамиды Пенроуза" и b) её проекция вдоль главной оси на плоскость; проекция является первичной, исходной декартовой координатной сеткой, основой для формирования подобия диаграммы Пенроуза. Снизу пирамида не ограничена, а продляется в бесконечность, асимптотически приближаясь к квадратному параллелепипеду

Как мы отметили ранее, диаграммы типа рис.15 включают в себя всё бесконечное пространство. Иначе говоря, за пределами абсолюта диаграммы никакого пространства нет и, казалось бы, быть не может. Однако

напомним о ставшей традиционной гипотезе сингулярности Чёрных дыр. Согласно ей, сингулярности являются основой, причиной возникновения так называемых кротовых нор. Через такие норы гипотетически можно перейти в другую Вселенную. Эта гипотеза имеет и диаграммное подтверждение в виде соответствующих расширенных решений Шварцшильда.

Рис.16. Множественные Вселенные на периодической диаграмме, подобной диаграммам Пенроуза

Более того, диаграммы Пенроуза для Чёрных дыр объединяют в бесконечную "этажерку", являющуюся своеобразным "массивом" параллельных миров. Исходя из

этого, ничто не мешает нам объединить и наши диаграммы в такое же "многоэтажное" строение. Для этого просто ставим рядом с пирамидой рис.15a другие такие же пирамиды. Фрагмент такой конструкции показан на следующем рисунке. Пирамиды мы расположили вершинами вниз, за плоскость рисунка. Вершины на рисунке обозначены как Дно. Рёбра состыкованных пирамид бесконечно простираются вверх и обозначены как Пик или знаком бесконечности. Интересно, что каждый квадрат, содержащий в себе бесконечную Вселенную, на рисунке имеет конечные размеры.

В заключение отметим очевидное: стороны квадрата, ромба *координатно* бесконечно удалены от его центра, то есть, мы вполне обоснованно можем квалифицировать их как *абсолюты* в смысле диска Пуанкаре. Заметим, что здесь так же помимо прямого сжатия, при котором абсолютом является внешний квадрат проекции, как показано на рис.15b, возможно и *инверсное* сжатие, при котором координаты на внешнем квадрате имеют конечное значение, а параллели сходятся к центру квадрата, в бесконечные значения координат. Четыре смежные диаграммы, расположенные вокруг такого центра, как показано штриховой линией на рисунке рис.16, являются проекцией объекта, который мы назвали по аналогии с псевдосферой Бельтрами псевдокубом Пенроуза.

Диск Пуанкаре

Как мы отметили выше, подобием *квадратной* диаграммы Пенроуза является, назовём её так, *круглая* диаграмма Пенроуза, фактически тождественная диску Пуанкаре. Как считается, диск Пуанкаре описывает бесконечное пространство отрицательной кривизны Лобачевского. Исследованию и иллюстрациям этого пространства посвя-

щены разные работы, например, [53]. В этой работе можно заметить отмеченную нами особенность в отношениях пространства и геометрических объектов: все имитации пространств Лобачевского отчётливо выглядят геометрическими телами, большинство из которых не только ограничены, но и конечны. В этой связи следует привести важную ссылку. Известно, что полной и регулярной поверхности, внутренняя геометрия которой представляла бы геометрию полной плоскости Лобачевского, поверхности *постоянной* отрицательной кривизны не существует:

"... не удаётся с помощью ни одной из известных до сих пор поверхностей постоянной отрицательной кривизны осуществить целиком всю плоскость Лобачевского... не существует аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей нигде особенностей и повсюду регулярной ... на ... вопрос о том, можно ли по способу Бельтрами осуществить в евклидовом пространстве на некоторой регулярной аналитической поверхности всю плоскость Лобачевского, надо ответить отрицательно" [26, с.304, с.311].

Из этого с полной определённостью следует ещё один вывод: точно так же и диск Пуанкаре, включающий *бесконечную* протяжённость, не является имитацией *бесконечного* пространства Лобачевского. Просто потому, что такого имитируемого пространства попросту не существует. Тем не менее, модель Пуанкаре получила всеобщее признание и широкое распространение, и нередко иллюстрируется весьма красочно [63].

Главное отличие диска Пуанкаре от диаграммы Пенроуза состоит в том, что последняя использует *декартовы*, ортогональные оси координат, а диск фактически использует *полярную* систему. Граница диска Пуанкаре названа *абсолютом*, что означает её метрическую, координатную

удалённость от центра в бесконечность. Иначе говоря, на диске, как и на диаграмме Пенроуза бесконечное пространство сжато до конечных размеров. Отметим явно: *принципы* компрессии, сжатия пространства практически, *принципиально* эквивалентны. Однако собственно *функция* сжатия диска Пуанкаре в литературе не описывается, либо эти описания весьма редки, поэтому формально мы можем использовать *любую* функцию, отвечающую указанным выше условиям областей "определения-изменения". Непосредственным следствием этой произвольности является то, что при "разжатии", *декомпрессии* пространства диска мы получим на плоскости разные эквиваленты геодезических линий пространства Лобачевского, представленных на диске Пуанкаре. Диск Пуанкаре – это, как заявлено, сжатое пространство Лобачевского отрицательной кривизны. Но выше мы отметили и привели ссылку, что такое пространство невозможно, нет такого полного, бесконечного пространства. Невозможно сжать, компрессировать то, чего нет. Как известно, Лобачевский называл свою геометрию "воображаемой", поэтому пространство диска Пуанкаре, видимо, следует называть воображаемым подобием воображаемой, не существующей поверхности, плоскости. Также добавим, что название "диск" не совсем верно. Диск подразумевает наличие третьего измерения, толщины, поэтому правильнее говорить "круг", а не "диск". Что же тогда сжато в этот диск – круг? Самым простым и очевидным является сжатие обычного плоского, бесконечного двухмерного *евклидова* пространства, которое существует, в отличие от не существующего пространства Лобачевского. Никаких противоречий в процессе построений на диске при этом не возникает, меняется только трактовка смысла преобразования. Поведение геодезических на диске полностью соответствует их *гипотетическому* поведению *как*

бы в пространстве Лобачевского. Специфическое *подобие* пятого постулата Евклида для диска имеет традиционный вид, но формулироваться, видимо, должно иначе:

Через точку вне заданной геодезической можно провести две и только две касательные геодезические, то есть, геодезические, не пересекающие заданную.

Подчеркнём особо: *касательные* геодезические – это линии, не пересекающие заданную. Никаких упоминаний о параллельности в этой формулировке нет и быть не должно [74]. Поскольку, повторим, функция компрессии, сжатия явно не указана, выберем её по своему усмотрению. Нанесём на диск Пуанкаре полярную систему координат, в которой длина радиус-вектора разбита на отрезки, пропорциональные обратным степеням двойки.

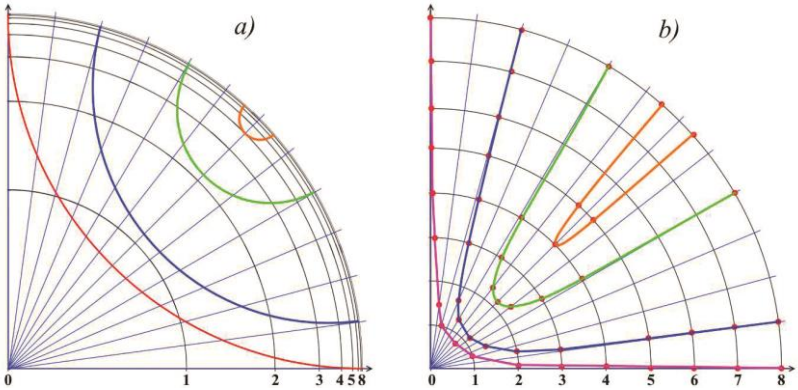


Рис.17. Геодезическими на диске Пуанкаре (здесь только I-квадрант) являются дуги окружностей. На исходной для диска плоскости Евклида эти дуги являются гиперболами

Это значит, что первый из них от центра имеет единичную длину, а каждый последующий в 2 раза короче предыдущего. В этом случае диаметр диска Пуанкаре будет равен 4. На рис.17а показан набор нескольких произволь-

ных геодезических *кажущегося* пространства Лобачевского на таком диске. Справа, на рис.17b показаны эти же линии, но на растянутом, "*разжатом*" пространстве, *исходном* двухмерном пространстве Евклида. Эти *исходные* линии геодезических мы для простоты строим на плоскости так же, как и раньше – "по точкам". Как известно, на диске Пуанкаре геодезическими являются полу-окружности, которые в точке касания абсолюта ортогональны к нему. На исходной плоскости Евклида, которую мы для наглядности, для сопоставимости представили так же в виде круга, эти исходные геодезические явно имеют вид гипербол. Это хорошо согласуется с трактовкой пространства Лобачевского как гиперболического.

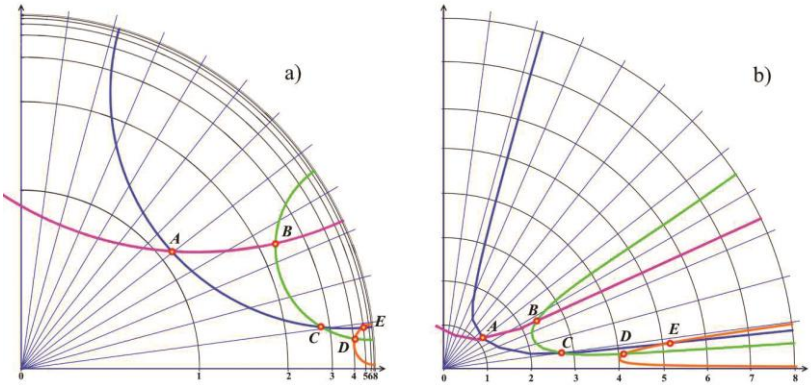


Рис.18. Построение геодезических треугольников из ортогональных окружностей: a) на диске Пуанкаре и b) из производных для них гипербол в плоском пространстве

Диск является двухмерным пространством, принципиально ничем не отличающимся от исходного двухмерного пространства Евклида. То есть, любые фигуры на этих поверхностях имеют строго однозначное соответствие, однако конформным это соответствие, видимо, не является, что можно увидеть на рис.18. Если визуально углы экви-

валентных треугольников ABC и кажутся одинаковыми, то о треугольниках CDE этого сказать нельзя: отчётливо видна разница углов этих треугольников. Вряд ли это расхождение можно отнести на графические погрешности. На диске можно построить какую-либо традиционную фигуру: квадрат, треугольник, круг, однако все они будут изначально криволинейными фигурами. Построение этих же фигур из геодезических, как видно на рис.17, при переходе в плоскость Евклида превратит их в фигуры, образованные пересечением гипербол. Более удобным является обратное: построение таких фигур на плоскости и перенос их в пространство диска. На рис.19b в плоском пространстве изображён треугольник, который на диске Пуанкаре рис.19a преобразовался в криволинейный треугольник. Дуга произвольной, не геодезической дуги окружности зелёного цвета на диске рис.19a преобразовалась на плоскости рис.19b в неопределённую кривую линию.

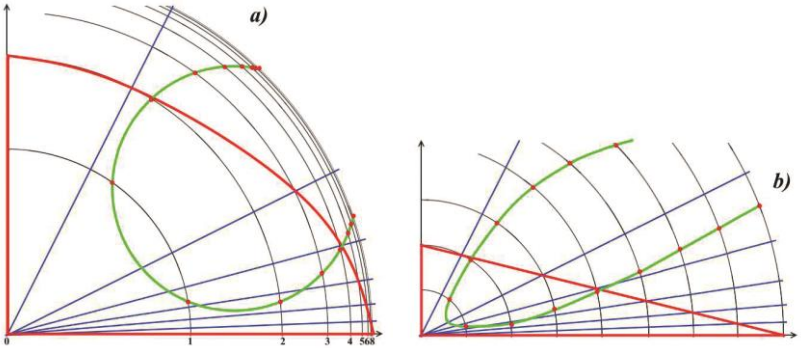


Рис.19. Диск Пуанкаре и производная евклидова плоскость

Если присмотреться внимательно, то можно заметить, что принцип построения диска Пуанкаре имеет отмеченное выше, мягко говоря, *заметное* сходство с принципом компрессии на диаграммах, подобных диаграммам Картера-Пенроуза. Также мы отметили, что не всегда можно

судить о кривизне пространства, представленного на евклидовой плоскости в виде проекций, криволинейных фигур и иногда даже в виде аксонометрии. Чтобы исключить двусмысленность, необходимо изначально, до начала анализа указать характер кривизны фигуры. Подчеркнём: изображение объекта даже в виде явно криволинейной аксонометрии не всегда может *однозначно* характеризовать кривизну поверхности. Для наблюдателя из пространства погружения поверхность трёхмерного тела может быть криволинейной, но для внутреннего, двухмерного наблюдателя поверхности этого же тела может быть евклидовой плоскостью. К рассматриваемому диску, кругу Пуанкаре это относится самым непосредственным образом. Диск Пуанкаре мы, безусловно, можем рассматривать как проекцию тела вращения, вблизи вершины напоминающего гиперболоид.

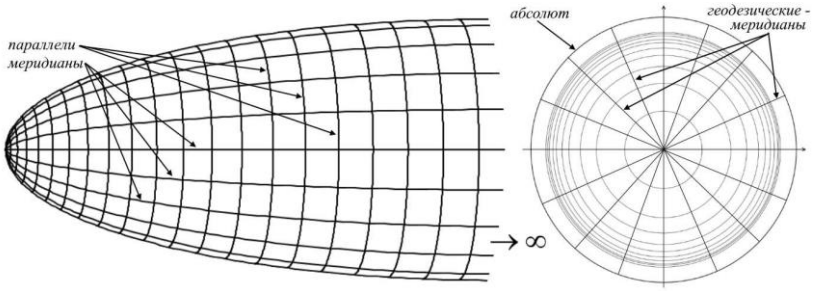


Рис.20. a) аксонометрия диска Пуанкаре и b) её проекция вдоль главной оси. Аксонометрический объект не ограничен справа, а продляется в бесконечность, асимптотически приближаясь к цилиндрической форме

Для наблюдателя из трёхмерного пространства погружения это тело однозначно имеет искривлённую поверхность. Но для обитателя на его поверхности это пространство – *евклидова* плоскость. Это напрямую связано с принципом формирования этой поверхности, её экспонен-

циальным сжатием. Тело, имеющее вблизи вершины форму гиперболоида или сфероида, уходит в бесконечность, асимптотически приближаясь к цилиндрической форме. В связи с этим параллели на его поверхности выглядят расположенными равномерно вдоль оси, на одинаковом расстоянии друг от друга. На диске Пуанкаре, проекции этого тела они расположены с уменьшающимися интервалами в сторону абсолюта, что вызвано эффектом перспективы. На рисунке рис.20b крайние окружности вблизи абсолюта мы не показываем по описанной выше причине: линии просто сольются в один сплошной чёрный круг. Геодезическими на гиперболоиде Пуанкаре однозначно являются меридианы. Другие геодезические, видимо, имеют форму, близкую к эллиптической, переходящей в круговую вблизи абсолюта, то есть, границы бесконечно удалённой области.

Помимо прямого сжатия, при котором *абсолютом* является внешняя окружность, как показано на рис.20b, возможно своеобразное инверсное подобие диска Пуанкаре, использующее инверсное сжатие с противоположно направленной компрессией – от края к центру, при котором внешний диаметр круга имеет конечное значение, а параллели сходятся к центру круга рис.21b. Аксонометрией этого объекта, инверсного диска является воронкообразный объект, наподобие искривлённого пространства-времени вокруг Чёрной дыры рис.21a.

Это подобие проекции диска Пуанкаре может быть в аксонометрии изображено как в виде купола, наподобие псевдосферы Бельтрами, так и в перевёрнутом виде, в виде воронки бесконечной длины. Действительно, модель на рис.21 имеет явное сходство с псевдосферой Бельтрами рис.22 с точностью до функции компрессии, создающей форму внешней огибающей воронки. Воронка вниз (на рисунке – вправо) не ограничена, а продляется в беско-

нечность, асимптотически приближаясь к прямой евклидовой линии. Учитывая это сходство, можно сказать, что это подобие диска Пуанкаре с внутренним абсолютом так же соответствует роли условной имитации пространства Лобачевского.

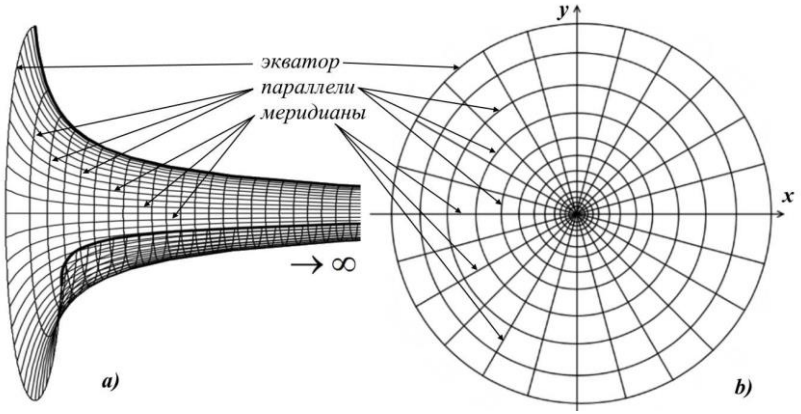


Рис.21. Инверсное сжатие пространства в диске напоминает псевдосферу Бельтрами

Заметим, что непрерывная геодезическая на псевдосфере рис.22а показана неправдоподобно. Это и очевидно и, кроме того, может быть легко проверено мысленным натяжением резиновой нити между начальной А и конечной точкой В изображённой кривой. Нить, как реальная физическая *наикратчайшая*, однозначно пройдёт более коротким путём, приблизительно по линии АВ оранжевого цвета. Очевидно, нить большей частью должна находиться внутри псевдосферы, чтобы прижиматься к выпуклой внутрь поверхности.

Как мы отметили, одно и то же пространство в зависимости от точки зрения может быть как криволинейным, так и евклидовой плоскостью. Эта двусмысленность возникает в процессе формирования поверхности. Рассмотрим, например, бесконечную евклидову плоскость, на которой

нарисованы, скажем, 10 коаксиальных окружностей с равными радиальными расстояниями между ними. Радиус внешней окружности установим равным R. Из центра окружности проведены равномерно, с равными углами между ними, несколько, например, 8 радиусов.

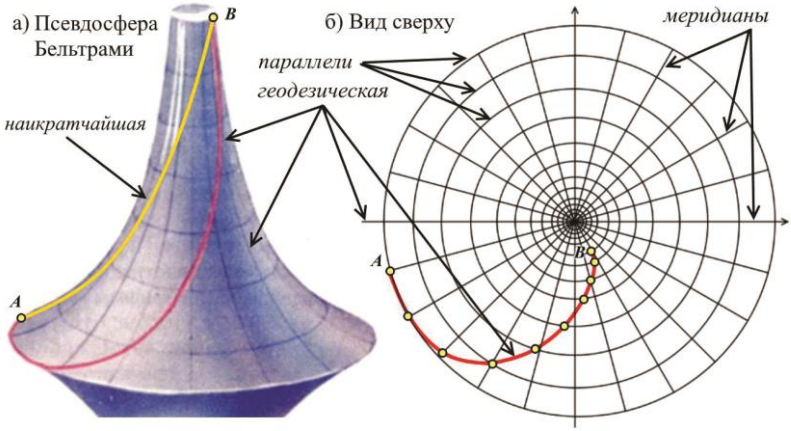


Рис.22. a) Псевдосфера Бельтрами и b) её проекция вдоль главной оси

Начнём уменьшать длины этих окружностей, но таким образом, чтобы отрезки радиусов между ними, ширина криволинейных колец оставались неизменными. Что произойдёт? Каждая из окружностей будет вынуждена подняться над плоскостью и тем выше, чем она дальше от центра окружностей. Образовавшееся криволинейное тело будет напоминать плетёную корзинку. Очевидно, что криволинейные трапеции между окружностями и радиусами также изменятся. Но мы потребуем, чтобы эти трапеции поднимались вместе с участками евклидовой плоскости, на которую они были нанесены изначально. Следовательно, искажаются и эти участки плоскости – они сжимаются *тангенциально*, то есть, радиальные отрезки на них не меняются, но круговые дуги укорачиваются.

Рассмотрим эту искривлённую поверхность с её собственной точки зрения или, традиционно, с точки зрения её двухмерных, плоских обитателей. Что они увидят в процессе деформации поверхности? Мы постулируем, что с искривлением, с деформированием поверхности искривляются, деформируются и все без исключения объекты на ней, причём в той же самой пропорции. Это значит, что эти плоские наблюдатели ничего не заметят. Как и исходная поверхность, для них новое пространство, поверхность является евклидовой плоскостью. Все радиальные отрезки неизменны по определению, а тангенциальные в равной степени уменьшают как поверхность, так и все линейки на ней. Теперь предположим, что коаксиальных окружностей не 10, а бесконечно много. Следовательно, исходный радиус R стремится к бесконечности, а сами окружности тем самым описывают всю бесконечную евклидову плоскость, стремясь в процессе сжатия к некоторому конечному значению, приближаясь к поверхности цилиндра. Искривлённая, деформированная по описанному способу поверхность для внешнего трёхмерного наблюдателя, наблюдателя в пространстве погружения будет иметь вид рис.20а.

Для этого наблюдателя поверхность, тело явно *выглядит* искривлённым. Этот наблюдатель знает, что поверхность этого цилиндрического подобия гиперболоида просто деформирована, и для внутреннего, двухмерного наблюдателя координатная сетка на ней ортогональна и декартова. Однако нанести на неё *прямую* евклидову линию он, внешний наблюдатель не может. Из двух "внутренних" прямых параллельных евклидовых линий на этой поверхности, как на вытянутой полусфере, только одна может совпасть с меридианом, вторая для внешнего наблюдателя является эквидистантой к ней. Экватор этой поверхности находится в бесконечности, но внешний наблюдатель легко

обнаружит, что традиционная сумма внутренних углов треугольника меридиан-экватор-меридиан на этой поверхности превышает 180 градусов. Сжимая с деформацией, стягивая к цилиндру бесконечную евклидову плоскость, мы и получили это своеобразное подобие асимптотически цилиндрической полусферы-гиперболоида.

Заметим, что вид, подобный рис.21а, имеет и проекция такой же инверсной *полярной, круговой* диаграммы Пенроуза, в которой радиальные окружности формируются по проекциям какой-либо координаты вдоль её же оси. Если же использовать в качестве проекции традиционную, декартову квадратную диаграмму Пенроуза, то на ней можно построить псевдокуб, проекция которого выделена штриховой линией на рис.16. Он, как можно догадаться, имеет вид, подобный псевдосфере, но с гранями и с параллелями квадратной формы.

Кроме того, такое же сходство можно обнаружить и у гравюр Эшера. При этом можно заметить, что на гравюрах используется два вида компрессии: компрессия *декартовых* координат, как на диаграммах Пенроуза, и компрессия *полярных* координат, как на диске Пуанкаре.

Используя такое же правило неизменности расстояния между концентрическими окружностями, можно осуществить и, так сказать, инверсную деформацию евклидовой плоскости. В этом случае, сжимая с деформацией, стягивая к центру бесконечную евклидову плоскость, мы можем получить ещё одно своеобразное инверсное геометрическое тело, подобие псевдосферы Бельтрами рис.21а, рис.22а.

Для этого начертим на плоскости окружность некоторого радиуса R. Длина её равна $2\pi R$. Следующую окружность помещаем внутри этой. Её радиус установим равным R/2. Следовательно, длина её окружности равна πR.

Теперь поднимем эту меньшую окружность вместе с участком плоскости внутри неё вверх на такую высоту, чтобы отрезок радиуса вне её вытянулся до некоторого фиксированного значения, большего R/2. Для простоты и определённости возьмём это значение равным R. Очевидно, что все "радиальные" линии между этими двумя окружностями вытянутся и так же будут равны R. Как и в предыдущем примере, поверхность между окружностями вытянется, деформируется, все криволинейные трапеции увеличатся. При этом условно пропорционально вытянутся и все "местные", коаксиальные окружности между этими двумя. Условно это означает, что отрезок пирамиды может быть как фрагментом конуса, так и иметь изгиб, например, параболический или гиперболический, при котором смежные участки пирамиды, полученные на следующих этапах, не будут иметь видимых изломов по линиям сопряжения.

На полученном таким способом первом участке криволинейной усечённой цилиндрической пирамиде проделаем эту же процедуру с кругом на её плоской вершине. Рисуем на ней новую окружность радиуса R/4 и вытягиваем вверх её вместе с внутренней плоскостью. Фрагмент плоскости, кольцо вне этого круга вновь вытянется, деформируется. Будем поднимать круг до тех пор, пока расстояние между ним и предыдущим кругом, ширина образовавшегося криволинейного кольца не станет равна R. Мы получили, следовательно, теперь уже двухступенчатую криволинейную цилиндрическую пирамиду с плоской вершиной.

Будем продолжать процедуру вытягивания бесконечно. В результате, с учётом гиперболического или подобного ему сглаживания ширины колец, мы получим тело бесконечной высоты, подобное рис.21а, подобие псевдосферы Бельтрами рис.22а. И вновь, как и в предыдущем

примере, внутренний, двухмерный наблюдатель на этой поверхности констатирует, что его пространство, двухмерное многообразие является *плоским*. Более того, находясь до вытягивания пространства на внешней окружности радиуса R, самого вытягивания он не заметит. Внутренний круг, каким был, таким и остался – это основание, дно вытянутого криволинейного конуса. Однако внешнюю часть плоскости, вне этого круга мы *обязаны* удалить, поскольку изначально предположили, что формируемый конус является эквивалентом бесконечной евклидовой плоскости. Действительно, ни одна из традиционных фигур, например, псевдосфера или просто полусфера, не имеют внешних "прикреплений". Можно вытягивание заменить на закручивание внутрь плоскости. Каждую дополнительную "ступень" пирамиды мы формируем завертыванием внутрь формируемой пирамиды, конуса внешней части исходной евклидовой плоскости. Образующееся при этом коническое тело в этом случае растёт не вверх над плоскостью, а вниз, под неё. Эти два рассмотренные трёхмерные объекты будут иметь соответствующие проекции, показанные на этих же рисунках рис.20 и рис.21. Очевидно, подобные построения можно проделать и с другими рассмотренными ранее объектами: логарифмической сферой рис.6, обычной полусферой рис.7, пирамидой подобия диаграммы Пенроуза рис.15 и псевдокубом Пенроуза рис.16. И в этих случаях характер кривизны – евклидова плоскость или искривлённая поверхность – будет определяться точкой зрения, наблюдателя внешнего, из трёхмерного пространства погружения, или внутреннего, двухмерного наблюдателя.

Гравюры Эшера

Отметим, что гравюры Эшера являются, пожалуй, одними из наиболее интересных и красочных иллюстраций,

воплощений пространства отрицательной кривизны Лобачевского. Эти, по сути, произведения искусства стали трактовать буквально как чисто научные, как иллюстрации конформного представления гиперболической плоскости Лобачевского, которое, в свою очередь, в некоторых вариантах выглядит как своеобразное воплощение диска Пуанкаре. С другой стороны, в некоторых гравюрах можно разглядеть и элементы диаграмм Картера-Пенроуза.

Во всех этих геометрических представлениях исследуемое *бесконечное* пространство "втискивается" в границы некоторой *ограниченной* плоской фигуры. У диаграмм Пенроуза – это ромб, квадрат, у диска Пуанкаре – круг, у гравюр Эшера – и круг и квадрат. При такой компрессии пространства становится видимым принципиальное сходство гравюр Эшера с моделями Пуанкаре-Лобачевского. По мнению Пенроуза, гравюры Эшера отождествляются с пространством отрицательной кривизны, плоскостью Лобачевского. Однако гравюры Эшера можно отождествить и с евклидовым пространством диаграмм Пенроуза. Изначально эти диаграммы разработаны как имитация *космологического* плоского пространства-времени. Однако, как мы показали выше, параметр времени можно заменить второй пространственной координатой, в результате чего мы получим *вневременную* бесконечную плоскость Евклида, сжатую в рамки ромба (квадрата, поставленного на одну из вершин) конечных размеров.

Мы не будем в деталях выяснять использованной автором *действительный* характер компрессии плоскости на гравюрах Эшера, в частности, подобных диску Пуанкаре, просто отметим, что на некоторых из них концентрические кольца, содержащие подобные фигуры, увеличивают свой радиус пропорционально обратным степеням двойки. Хотя и *приблизительно*, с некоторой погрешностью. На таких

гравюрах прирост внешнего радиуса каждого последующего, большего кольца равен половине прироста радиуса предыдущего кольца, его внешней окружности

$$\frac{\Delta R_n}{\Delta R_{n-1}} = 2^{-n} \qquad (7)$$

Например, пусть радиус первой окружности, равен единице. Порядковый номер первой окружности обозначим равным нулю: n = 0. Тогда радиус второй окружности (n = 1) будет равен:

$$R_n = R_{n-1} + \Delta R_{n-1} \times 2^{-n} = 1 + 1 \times 2^{-1} = 1{,}5$$

То есть, он *увеличился* в полтора раза. Соответственно "ширина" полосы, кольца между окружностями *уменьшается* в той же пропорции:

$$\frac{\Delta R_1}{\Delta R_0} = \frac{\Delta R_{n-1} \times 2^{-n}}{\Delta R_{n-1}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Ширина первой полосы, радиус первой окружности равен 1, а ширина следующей полосы – в два раза уже.

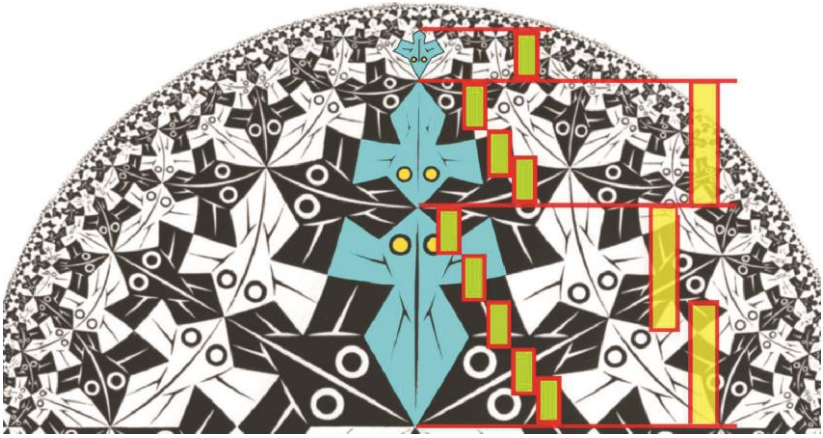


Рис.23. Фрагмент гравюры Эшера с птицами [51, с.52]. Все птицы по размеру равны друг другу и просто пропорционально уменьшены в зависимости от удалённости от центра

Рассмотрим использование этого алгоритма на примере рис.23 – круговой гравюры Эшера с птицами, которая хорошо описывается полярными координатами. Полярный угол изменяется от 0 до 2π, а радиус-вектор в порядковых номерах занимает всю бесконечную целочисленную ось. Визуальная длина радиуса гравюры в этом случае равна 2, как и на степенной диаграмме Пенроуза [78]. На гравюре заметно, что размер второй от центра птицы, действительно, практически в два раза меньше первой, самой большой.

Далее замечаем, что размер третьей меньше размера второй также почти в два раза. Для наглядности этих сравниваемых птиц мы выделили цветом. Размеры птиц показаны условными цветными прямоугольниками равной длины. Отклонение размеров элементов гравюры от использованной нами *точной* геометрической последовательности связано, очевидно, с тем, что это всё-таки не строгий машиностроительный чертёж, а уникальное произведение искусства.

На диаграммах Пенроуза компрессия координат, напомним, произведена по закону арктангенса. Но это, о чём мы уже говорили, не принципиально: диаграмма, подобная рассмотренной гравюре, как видим, имеет компрессию, близкую к закону обратных степеней двойки.

Подобный алгоритм можно обнаружить и на другой гравюре: с ангелами и демонами, рис.24. На этой гравюре компрессия выглядит более "быстрой", но и более неравномерной. Каждый демон и ангел из их троек в центре гравюры повторяется в уменьшенном виде на некотором удалении от центра вдоль одной из шести осей, угол между которыми равен 60 градусам. Первый, наибольший периодический фрагмент повторяется с уменьшением более чем в три раза, как видно по жёлтым прямоугольникам на рисунке рис.24. Следующий повторяющийся элемент

уменьшен в 5 раз, что видно по красным маленьким размерным прямоугольникам. Конечно, сравнение мы производим довольно условно, поскольку объекты не только уменьшаются, но и меняют направление и тип (цвет).

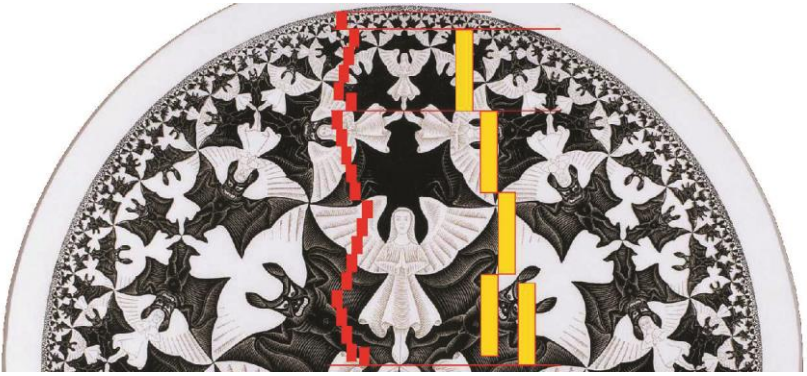


Рис.24. Фрагмент гравюры Эшера с ангелами и демонами. Все её персонажи равны друг другу и просто пропорционально уменьшены в зависимости от удалённости от центра

Такая же картина хорошо просматривается и на гравюре Эшера с ящерицами (не приводим). На этой гравюре можно заметить только две оси: вертикальную и горизонтальную. Пара центральных ящериц, глядящих в разные стороны, повторяется по этим направлениям, уменьшаясь по мере удаления от центра.

Столь детальный анализ мы привели, чтобы отметить как очевидное: *круговые* гравюры Эшера, в частности, с птицами, ящерицами и ангелами может тривиально рассматриваться как *плоское* пространство Евклида. Никаких гиперболических геодезических при этом не требуется. Их появления связано исключительно с визуализацией, точкой зрения. Мы из пространства погружения можем просто выбрать: считать гравюру *несуществующей* плоскостью Лобачевского или плоскостью Евклида. Они тождественны, равноправны по выбору.

Гравюры Эшера с птицами, ангелами и ящерицами по способу компрессии и использованной полярной системе координат имеют явное сходство с диском Пуанкаре. Другие гравюры Эшера, квадратные имеют уже заметное сходство с диаграммами Пенроуза. Одной из таких наиболее наглядных гравюр квадратной формы является гравюра с рыбами. На этой гравюре изменение размеров рыб происходит практически в точности по закону обратных степеней двойки. На следующем фрагменте гравюры на рисунке рис.25 мы выделили цветом четыре такие рыбы и нанесли рядом с ними прямоугольники попарно равной высоты. Видим, что самая большая, центральная рыба имеет в высоту практически два больших прямоугольника красного цвета. Размер следующей рыбы равен одному большому прямоугольнику или двум средним, синего цвета. Третья рыба меньше предыдущей так же в два раза, что видно по этим же прямоугольникам. Наконец, последняя, самая маленькая рыба так же в два раза меньше предыдущей рыбы.

Рис.25. Фрагмент гравюры Эшера. Все её элементы равны друг другу и просто пропорционально уменьшены в зависимости от удалённости от центра

Этих рыб сейчас мы сравнили только по их размеру. Но и их удалённость от центра так же подчиняется с довольно высокой точностью этому же закону обратных степеней (7). Проведём через точки касания друг с другом рыб,

расположенных вдоль координатных осей, ортогональные линии от этих координатных осей в IV квадранте вправо и вниз.

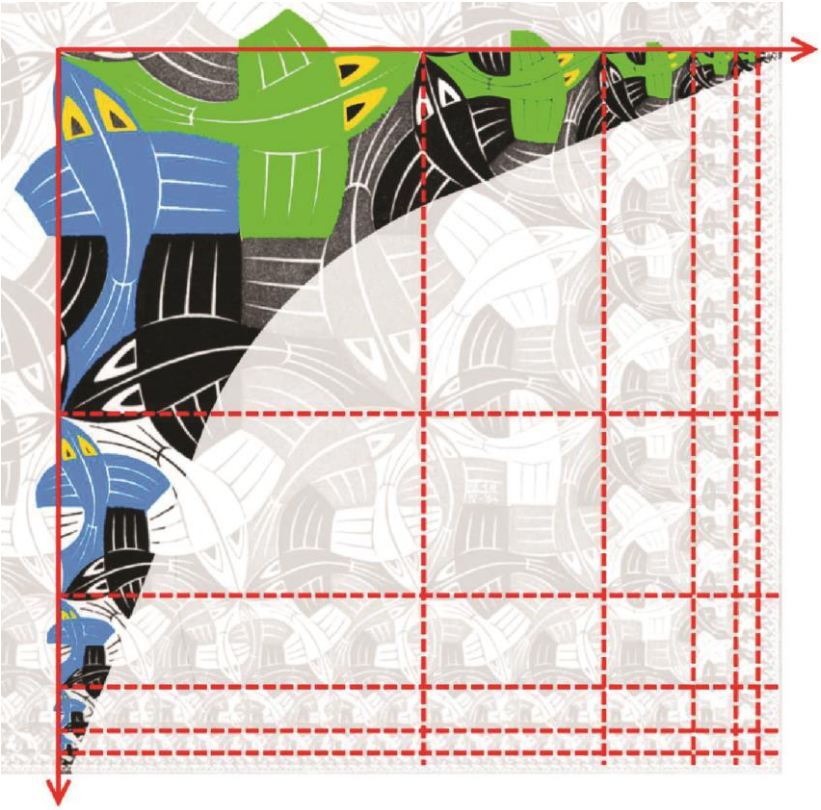


Рис.26. Фрагмент гравюры Эшера. Все её элементы равны друг другу и просто пропорционально уменьшены в зависимости от удалённости от центра

Образовалась отчётливая координатная сетка с переменным шагом, которая визуально описывается законом (7) и также очень похожа на такую же сетку на рисунке рис.12, использованную при создании диаграммы Пенроуза. Видим, что гравюра Эшера с рыбами имеет однозначное сходство с этими диаграммами, поэтому все выкладки,

относящиеся к ним, мы можем отнести и на эту гравюру Эшера. Мы можем прямо заявить, что эта гравюра на самом деле является просто сжатой евклидовой плоскостью. Следовательно, все изображённые на ней фигура имеют на этой плоскости, до её компрессии, один и тот же размер и расположены строго равномерно на всём её бесконечном протяжении.

То, что фигуры, рыбы на гравюре рисунка рис.26 все имеют один и тот же размер, можно показать, просто увеличив, "разжав" *каждую* из сжатых фигур в соответствии с её коэффициентом сжатия (7) или согласно координатной сетке на рисунке рис.26. Для этого разжатия мы просто вырезаем фрагмент гравюры с соответствующей рыбой и растягиваем его. Отмечаем корректность этой процедуры: на рисунке рис.27 мы выстроили в ряд эти увеличенные фрагменты и заключаем, что все они равны друг другу.

Рис.27. Фрагмент гравюры Эшера. Каждый элемент справа увеличен пропорционально.

Следует отметить низкое качество, плохое пиксельное разрешение увеличенных рыб. Связано это с низким, недостаточным разрешением исходного рисунка. При увеличении какого-либо фрагмента рисунка неизбежно уменьшается количество точек на один и тот же его элементарный квадрат. Проблему качества можно решить

обратной процедурой. На рисунке рис.28 мы каждую следующую, более удалённую от центра рыбу получаем уменьшением предыдущей рыбы, более близкой к центру. Теперь количество точек в копии пропорционально уменьшается, но качество рисунка, этого фрагмента ухудшается уже не так сильно. Уменьшенные таким способом фрагменты мы накладываем на оригинальный, исходный рисунок в соответствующей его зоне.

Рис.28. Фрагмент гравюры Эшера. Оригинальная правая сторона заменена элементом 1, повторяющимся с уменьшением: 2, 3, 4, 5. На нижней половине рисунка показан этот же фрагмент в оригинале.

Для сравнения добавленных уменьшенных фигур с оригинальными снизу приведён оригинал фрагмента диаграммы и в стыках рыб проведены вертикальные, тонкие белые линии. Прямыми измерениями ширины добавленных фрагментов 1, 2, 3, 4 и 5 можно определить, что с достаточной точностью каждый фрагмент, рыба на нём имеет ширину в два раза меньшую, чем предыдущий, расположенный слева от него.

Ещё раз обратимся к гравюре с птицами. По мнению Пенроуза, высказанному в подписи к этой гравюре Эшера, и которое мы считаем спорным

"Гравюра на дереве, очень точно иллюстрирующая конформное представление гиперболической плоскости" [51, с.52].

В подписи к следующему рисунку эта мысль получает дальнейшее развитие

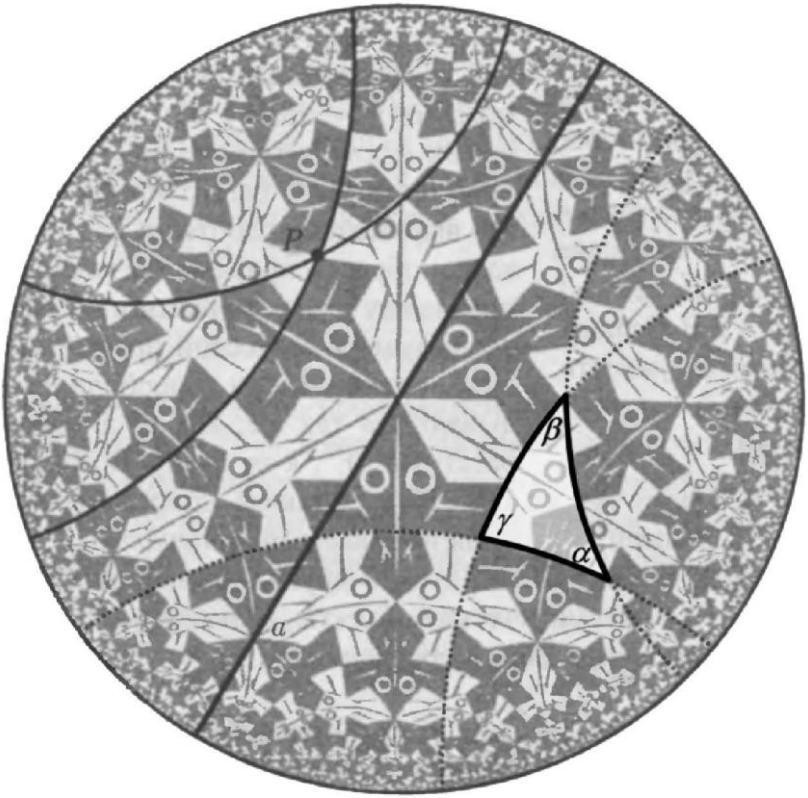


Рис.29. Гравюра Эшера в работе Пенроуза с выделенными гиперболическими прямыми. Рисунок, иллюстрация гравюры Эшера в работе [51, с.53].

Сам рисунок является повторением предыдущего, гравюры Эшера с птицами, на которую нанесены дополнительные линии. В подписи к рисунку говорится:

"Та же гравюра Эшера, что и на рис.2.11, только теперь на ней выделены гиперболические прямые ... и гиперболический треугольник" [51, с.53].

Линии на рисунке таковы, что отчетливо видно: гравюра *трактуется* как диск Пуанкаре. Следовательно, наши исследования этого диска мы можем отнести и к этой гравюре. Высказанное в подписи к ней мнение мы *осторожно* объявим ошибочным. К выделенным на рисунке "прямым" в подписи в скобках дается пояснение, что это "евклидовы прямые или дуги евклидовых окружностей, пересекающие ограничивающую окружность под прямым углом" [51, с.53].

Однако эти "прямые" следует всё-таки называть геодезическими, чтобы не вводить читателя в заблуждение, тем более, с уточнением "евклидовы прямые". Ни с какой точки зрения эти *геодезические* не являются *прямыми*, тем более евклидовыми: ни с точки зрения внешнего наблюдателя, из трёхмерного пространства погружения, ни с точки зрения внутреннего, двухмерного наблюдателя. Эти линии, названные гиперболическими "прямыми", действительно, видны *внешнему* наблюдателю, находящемуся в пространстве погружения Евклида E^3 как дуги евклидовых окружностей. Однозначно, это дуги окружностей, которые для внешнего наблюдателя ни гиперболическими, ни, тем более, евклидовыми прямыми не являются.

Наблюдатель во внутреннем двухмерном пространстве гравюры, "плоский" наблюдатель, действительно, будет видеть указанные окружности как гиперболы, как показано на наших рисунках рис.17 и рис.18. Но и для него эти линии являются *обычными* гиперболами, не имеющими

никакого отношения к "прямым линиям" и даже геодезическим. Геодезическими линиями для него будут *строго* прямые евклидовы линии, которые на диске будут видны как кривые, что показано на рисунке рис.19 красным треугольником. Исходным пространством, сжатым в диск Пуанкаре или гравюру Эшера с птицами и выявленной метрикой является и может быть только двухмерная *плоскость* Евклида. Далее в цитируемой подписи к рисунку говорится

"Гиперболические углы совпадают с евклидовыми углами" [там же].

Мы определили, что гравюра Эшера с птицами определённо имеет полярный радиус с делениями по закону обратных квадратов (7). При таком сжатии двухмерного многообразия диск Пуанкаре и, соответственно, поверхность гравюры с птицами может быть получена, *только* если исходное двухмерное многообразие является *евклидовой* плоскостью. Кроме того, никакого исходного гиперболического многообразия, полной плоскости Лобачевского не существует [26, с.304, с.311].

Вновь обратимся к нашему рисунку рис.18. При таком соотношении исходного многообразия и многообразия сжатого в диск или гравюру, углы одних и тех же треугольников, на нашем рисунке рис.18 это углы треугольника CDE, не совпадают. Наконец, в подписи к рисунку делается вывод:

"Постулат о параллельности (в формулировке, проиллюстрированной на рис. 2.8б) явно нарушается, а углы треугольника дают в сумме величину, меньшую π" [51, с.53].

Говорить о сумме углов треугольника мы имеем право только в том случае, когда он образован геодезическими. Можем ли мы считать геодезическими изображённые на

гравюре дуги окружностей? Если да, то следует уточнить, в каком именно пространстве эти линии – геодезические? Вопрос крайне спорный: диск Пуанкаре и гравюра не имеют, условно говоря, "искривлённого" первоисточника. Нет такого пространства *отрицательной* кривизны, из которого они выведены и которое якобы представляют, отображают. Если считать диск и гравюру искривлённым многообразием, то это совершенно самостоятельные, независимые многообразия и, заметим, довольно странные, учитывая их явное происхождение из евклидовой плоскости. Следовательно, называть дуги окружностей геодезическими мы можем, но это будет ничем не обоснованная декларация, просто постулат, аксиома, если угодно.

Что касается постулата о параллельности, то не он нарушается – отвергаются сами представления о параллельности на искривлённой поверхности [74]. Упоминать параллельность в рассуждениях об искривлённых многообразиях у нас нет никаких оснований.

Хотя принцип построения гравюр с шестью и двумя осями принципиально один и тот же, тем не менее, увидеть геометрию Лобачевского на этих гравюрах весьма проблематично. На квадратной гравюре с рыбами, имеющей четыре оси, мы выделили повторяющиеся с уменьшением элементы, рыб вдоль одной из осей. Попытки построить на этой гравюре гиперболические прямые привело к появлению обычных евклидовых прямых.

Заключение

Диск Пуанкаре не может рассматриваться как имитация пространства отрицательной кривизны Лобачевского, поскольку аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны попросту не существует. Диск охватывает пространство бесконечной протяжённости, и

этим пространством может быть только евклидова плоскость, деформированная, асимптотически сжатая в круг конечных размеров.

Диаграммы Пенроуза можно рассматривать как двухмерное многообразие, евклидову плоскость деформированную, асимптотически сжатую в квадрат конечных размеров. Функцией сжатия, компрессии такого многообразия может быть не только арктангенс или тангенс, но и любая функция с бесконечной областью определения и конечной областью изменения.

Изменение "направления" компрессии на таких диаграммах Пенроуза и их подобиях формирует производное трёхмерное геометрическое тело бесконечной высоты и квадратным основанием конечных размеров. Тело напоминает криволинейную пирамиду, подобную псевдосфере Бельтрами и названо нами псевдокубом Пенроуза.

Гравюры Эшера имеют все признаки как диска Пуанкаре, так и диаграмм Пенроуза. Как и диск Пуанкаре, по тем же причинам, гравюры Эшера не могут рассматриваться как имитация полного пространства отрицательной кривизны Лобачевского. Полуокружности, гиперболические "прямые" на гравюрах являются *кажущимися* подобиями геодезических Лобачевского, поскольку получены особым искажением, деформацией гипербол на обычной евклидовой плоскости.

Любое плоское или искривлённое двухмерное многообразие рассматривается в виде проекции на плоскость, то есть, на самом деле является евклидовым, плоским двухмерным многообразием. Судить об *условной* кривизне многообразия на плоскости следует по его прообразу объекта большей размерности, объекта в пространстве погружения, проекцией которого оно фактически является. Другими словами: кривизна многообразия, спроецирован-

ного на плоскость должна быть *известна* до проецирования. Характер кривизны поверхности определяется точкой зрения, в зависимости от которой одно и то же двухмерное многообразие может выглядеть как плоским, так и искривлённым. Иначе говоря, одна и та же поверхность, двухмерное многообразие *одновременно* может рассматриваться и как евклидова плоскость, и как искривлённая поверхность.

Диаграмма Пенроуза как система координат

В физике и математике практически невозможно обойтись без систем координат, которые всегда присутствуют в том или ином, явном или неявном виде. В литературе для наглядности во многих случаях используются их различные графические *отображения*. Несомненно, каждый, интересующийся этими науками, хорошо знаком, как минимум, с декартовыми координатами. Однако в процессе исследований часто появляется необходимость создания различных модификаций координатных систем, поскольку многие явления становятся более наглядными в своих собственных, специфических системах координат. Например, для величин, изменяющихся в широких диапазонах, были разработаны логарифмические системы координат, в которых по оси величина отображалась в виде её логарифма. Двойная логарифмическая координатная сетка, в частности, используется для демонстрации процесса расширения Вселенной после Большого Взрыва. Миллиардные величины расстояний в световых годах и времени в годах заменяются в этом случае шкалами в 15-20 единиц.

Некоторые другие процессы требуют еще более длительных интервалов, поэтому для них разработаны ещё более компактные шкалы. Например, в диаграммах Крускала-Шекереса, в которых применен "часовой принцип" отображения времени, напоминающего часовую стрелку, бесконечный интервал времени сжат в пределах прямого угла. Для этого угловая шкала сделана неравномерной: на её границах равномерные деления времени стремятся к бесконечно малым углам.

При описании космологических явлений, гипотез или решения тех или иных задач общей теории относительности, как можно заметить, чаще всего используются конформные диаграммы, разработанные одним из ведущих

математиков и физиков – Роджером Пенроузом. Иногда в литературе указывается двойное авторство диаграмм – диаграммы Картера-Пенроуза. Конформным отображением является такое непрерывное отображение, преобразование координат, при котором сохраняются углы между кривыми и, соответственно, сохраняется форма бесконечно малых фигур.

В этих диаграммах использован все тот же принцип деформации координат. Они отображают пространственно- и времениподобные бесконечности на конечные расстояния, другим словами, отображают бесконечное пространство-время на квадрат конечных размеров.

Собственно говоря, это и является главным достоинством таких диаграмм – бесконечный диапазон изменения координат и изотропный характер светоподобных геодезических. Как в исходной диаграмме Минковского, так и на конформной диаграмме светоподобные геодезические имеют угол наклона ± 45° и обозначают радиальные изотропные геодезические [68, с.139]. Это позволяет строить на диаграмме световые конусы и отслеживать поведение всех геодезических, выделяя среди них как времениподобные (вещественные тела), так и пространственноподобные (тахионы).

Следует отметить, что *световые конусы* на диаграммах на самом деле являются *световыми треугольниками*. На *плоских* диаграммах конус как таковой изобразить нельзя, а диаграммы с двумя *пространственными* координатами практически не рассматриваются. В случае *светового треугольника* все времениподобные геодезические в обязательном порядке должны находиться между сторонами треугольника, образованными двумя световыми лучами, и пересекать его основание $t = \text{const}$. Если же рассматривать трёхмерное пространство, то говорить также

следовало бы не о световых конусах, а о *световых сферах*. В основе всех этих световых ограничителей лежит времениподобное уравнение интервала

$$\partial s^2 = -c^2 \partial t^2 + \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 < 0$$

После тривиальных преобразований получаем

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_{xyz}^2 < 1$$

Уравнение означает, что скорость события всегда меньше скорости света c = 1. Графически уравнение тождественно поверхности (линии) касательных к геодезическим событий. Количество слагаемых в уравнении выбирается равным размерности пространства (не считая времени). Уравнение отражает *обобщённое понятие* светового конуса, то есть, и треугольника, и конуса, и сферы, и относится к геодезическим произвольной формы, к событиям, движущимся с ускорением.

Наименее очевидным является понятие *световой сферы*, относящейся к наиболее сложному случаю движения событий – одновременно по трём пространственным координатам. На трёхмерной диаграмме время, четвёртую координату непосредственно показать невозможно. Ситуацию позволяют разрешить динамические диаграммы. Это просто набор диаграмм, каждая из которых соответствует определённому моменту времени. Собственно координата времени в явном виде отсутствует и на такой диаграмме, анимации, но вместо неё можно показать *световую сферу*. В исследуемую точку траектории события помещается центр *световой сферы* и вектор скорости. Очевидно, направление его совпадает с траекторией, а длина равна скорости в этой точке. Световая сфера имеет радиус c = 1, поэтому вектор скорости не должен выходить за её пределы. Световая сфера охватывает все возможные направ-

ления движения события в данной точке, поэтому векторы скорости не являются мировыми линиями.

Следует отметить, что *световой конус* (треугольник) на диаграммах выполняет главным образом контрольную функцию. Он позволяет визуально определить времениподобный характер геодезических. Правда, непосредственно это относится к инерциальному движению. В случае ускоренного движения световой конус неявно относится не к самой геодезической, а к мысленно проведённой к ней касательной в исследуемой точке. Формально все световые ограничители можно заменить на обобщённый – *световой вектор*. Именно с ним и должен сравниваться вектор скорости события. На традиционных диаграммах Пенроуза мы мысленно, и, видимо, чаще всего неосознанно проводим единичную касательную к мировой линии события и также мысленно рассматриваем её проекцию на нулевую геодезическую. Если в этой исследуемой точке касательная совпадает с нулевой геодезической, то скорость события равна скорости света.

Можно заметить, что диаграмма Пенроуза-Картера чем-то похожа на диаграмму Крускала-Шекереса (Секереша) и для шварцшильдовской черной дыры не дает никакой принципиально новой информации.

В научных и научно-популярных статьях по физике, космологии можно заметить, что авторы часто при иллюстрации своих выкладок, доводов используют не совсем корректный приём. На приводимые иллюстрации они не наносят обозначения, поясняющие назначение или смысл изображенных на них элементов.

В науке по молчаливому или редко озвучиваемому соглашению *принято* каждый член приводимых уравнений расшифровывать сразу же после уравнения, если, конечно, эта расшифровка не была сделана недалеко выше. Или же

смысл этого члена уравнения, его обозначение не является новым или редко встречающимся, а является общепринятым и полностью соответствует контексту уравнения. Понятно, что для автора всё и так ясно и "общепринято". Но при публикации автор, очевидно, рассчитывает, что его книгу, статью будут читать не только равные ему по уровню подготовки, но и те, кто только приступил к изучению нового материала.

Очевидно, что такое же молчаливое соглашение должно существовать и при оформлении иллюстраций. Тем не менее, и в научной и научно-популярной литературе нередко это "соглашение" нарушается. Поэтому при чтении возникает множество вопросов по ним: то ли иллюстрация что-то поясняет, то ли пытается затемнить, затуманить ситуацию. Под видом глубокомысленного изложения иной раз прячутся сомнительные моменты. Никаких пояснений к изображению, кроме названия, не приводится, и читатель может на свой вкус трактовать его смысл. Более вероятно, что эти трактовки будут отличаться от трактовок автора изображения. Примерно такое же "утаивание" можно разглядеть и в некоторых иллюстрациях в научных работах. При рассмотрении диаграмм Пенроуза, приводимых им, Хокингом и другими авторами в своих статьях, книгах, нередко можно встретить подобные элементы, чрезмерно опирающиеся на догадливость читателя. Но, в сущности, не это главное. Главное состоит в том, что "на догадку" зачастую отправляются довольно сомнительные идеи. Идеи, которые при внимательном рассмотрении оказываются недостаточно обоснованными, а то и ошибочными.

Одно из основных, исходных изображений диаграмм Пенроуза можно найти в его работе, в которой конформная структура бесконечности представлена как диаграмма плоскости (t', r') на рисунке рис.1. Помимо равнобедрен-

ного прямоугольного треугольника, поставленного на диагональ (гипотенузу), диаграммы Пенроуза нередко имеют и вид ромба ("бриллиант" Пенроуза), поставленного на диагональ квадрата. По сути, диаграммы являются обычной системой координат, и в этом качестве принципиально не отличаются от традиционной декартовой (квадрат) или полярной системы координат (треугольник). Имеющиеся отличия специфичны, но не принципиальны, в них нет антагонизмов. Чаще всего используется полярный вид диаграмм рисунка рис.1

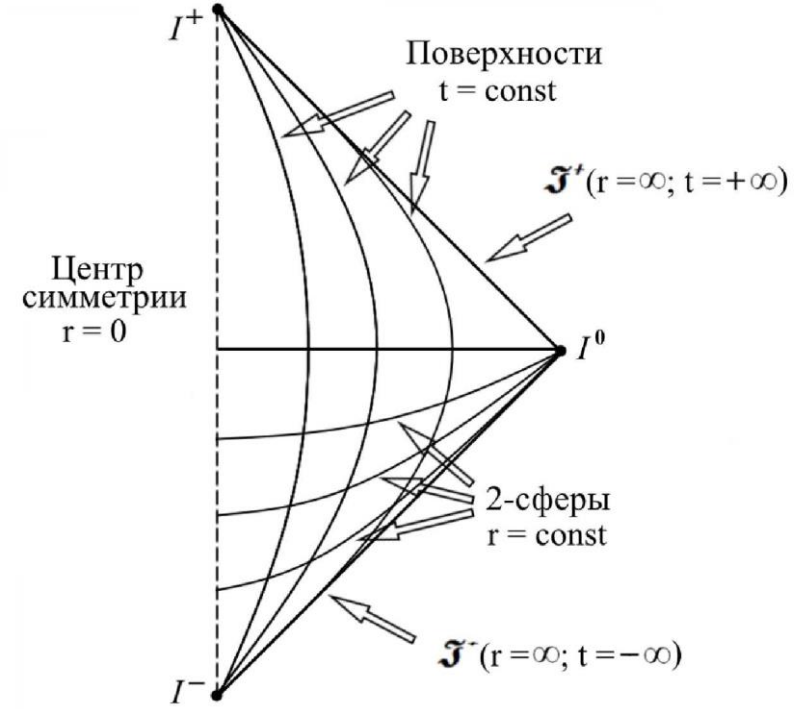


Рис.1. Диаграмма Пенроуза для пространства-времени Минковского [67, с.53].

На такой полярной диаграмме из уравнения интервала Шварцшильда присутствует лишь линейная коорди-

ната, а вращательные, угловые, как это обычно называется, подавлены. Вторая особенность – это конформное преобразование координат с помощью функции арктангенса, вследствие чего всё бесконечное пространство-время вмещается в треугольную или квадратную диаграмму. Диаграмма на рисунке не содержит никаких событий, это чистая или пустая диаграмма. Штриховой линией обозначен центр полярной системы координат, в который обычно помещается центр коллапсирующей нейтронной звезды или Чёрной дыры. Величина радиус-вектора r обозначает в этом случае удалённость событий от этого центра.

Каждая точка диаграммы рассматривается как сфера S^2, которая формально отождествляет всё множество точек, находящихся на некотором расстоянии от центра. Считается, что поведение всех точек на этой поверхности одинаково, то есть, диаграммы Пенроуза описывают всё доступное пространство-время вокруг звезды. Принимается, что поведение точек сферы не зависит от значения угловых координат системы, которые могут быть подавлены, то есть считаться равными, например, нулю. На диаграмме радиус-вектор изменяется от нуля до бесконечности и обозначен поверхностями r = const.

В роли второй координаты выступает время, также изменяющееся на диаграмме в бесконечном диапазоне. Время на диаграмме обозначено поверхностями, линиями t = const. Как следствие, любая линия на диаграмме является мировой линией или геодезической, показывает изменение во времени положения отождествлённых точек 2-сферы или объектов относительно центра системы координат.

Довольно скрупулёзный просмотр доступной литературы и источников в интернете показал, что описание собственно диаграмм зачастую весьма скромное, на что

указывают и некоторые другие авторы. Рассматривая практические варианты использования диаграмм, читателю придётся о многом догадываться самому. На рисунке рис.2 в исходном, "пустом" виде приведен квадратный вариант диаграммы Пенроуза.

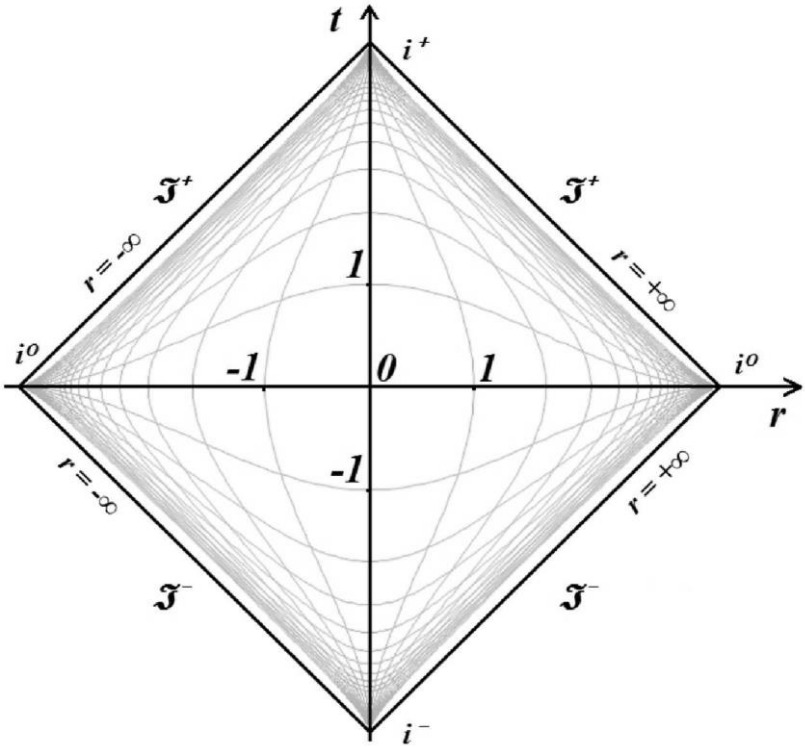


Рис.2. "Пустая" квадратная диаграмма Пенроуза

Использованы следующие обозначения: i^+ и i^- – времениподобные бесконечности будущего и прошлого; i^0 – пространственноподобная бесконечность; J^+ и J^- светоподобная (или нулевая) бесконечность будущего и прошлого. Иначе говоря, точки i^0 обозначают бесконечное удаление в пространстве, а точки i^+, i^- обозначают, соответственно, области далёкого будущего и прошлого. Таким

образом, на диаграмме в ограниченных рамках показано всё пространство-время. Во многих случаях рядом со сторонами квадрата пишут дополнительно обозначения вида $r = \infty$, как показано на рисунке.

Нетрудно заметить, что конформный принцип, способ сжатия, уплотнения координатной сетки, заложенный в диаграммы Пенроуза весьма похож на такой же принцип сжатия в логарифмических диаграммах, в которых оси обычной декартовой системы координат сжаты в логарифмическом масштабе. В этом случае логарифмическому диапазону системы координат, например, в 10 единиц соответствует такой же диапазон обычной декартовой системы координат в 10^{10} единиц. Но логарифмическая диаграмма, в отличие от диаграммы Пенроуза, не имеет ограничений в сторону возрастания. Как и на логарифмических диаграммах, на диаграммах Пенроуза шкалы осей сильно нелинейные.

На рисунке рис.2 линии равных расстояний $r = \text{const}$ (горизонтальные дуги) и времени $t = \text{const}$ (вертикальные дуги) мы обычно изображаем ярко-бирюзовым цветом. Делениям по осям присвоены единичные значения. Размерность единиц для оси расстояний может быть произвольной: метр, километр, парсек, световой год и тому подобное. В этом случае интервалы по оси времени имеют соответствующую размерность: время на прохождение одной единицы расстояния.

В результате такой дискретизации полей диаграммы выполняется вторая задача – конформное соответствие декартовым координатам. Это значит, что все изотропные (световые) углы в декартовых координатах соответствуют таким же углам на диаграмме Пенроуза в 45° с осями координат. Любая линия, изображенная на диаграмме Пен-

роуза под этим углом, является светоподобной (нулевой) геодезической, обозначающей луч света.

Повторим: система координат диаграмм Пенроуза отражает лишь одну *пространственную* координату – удалённость объекта от начала координат. Другими словами, все объекты на диаграмме движутся вдоль одной-единственной линии. Поэтому любые искривленные мировые линии на этой диаграмме означают всего лишь движение объектов (событий) с различными скоростями вдоль одной единственной прямой пространственной линии. Таким образом, любое пересечение линий означает столкновение событий или объектов, их представляющих. При этом каждая точка её помечена как 2-сфера. Наглядно это можно изобразить в виде рисунка рис.3. На рисунке окружностями показаны те самые 2-сферы, которые обозначаются точками на диаграмме Пенроуза. Фактически диаграммы Пенроуза, как и диаграммы Минковского, и полярные координаты для пары переменных t, r отображают *одномерное* пространство.

На рисунке ось t не показана, система рассматривается в некоторый момент времени $t = 0$. Здесь три окружности изображают три разные сферы, которые и называются 2-сферами. Ни на диаграммах Пенроуза, ни в литературе в описаниях нет упоминаний о других координатах этой системы.

Для трехмерного полярного пространства это две угловые координаты, обычно углы φ и θ. В свою очередь это означает, что все возможные направления радиус-вектора r отождествляются в одно направление. Эта единственная декартова ось изображена на рисунке. Если отбросить отрезок оси от минус ∞ до нуля, то мы получим единственное полярное направление. Другими словами, на декартовых диаграммах Пенроуза расстояния могут быть и

положительными и отрицательными, а на полярных диаграммах – только положительными. В последнем случае отрицательная полусфера отождествляется с положительной по правилу "угол падения равен углу отражения". Время может быть положительным и отрицательным.

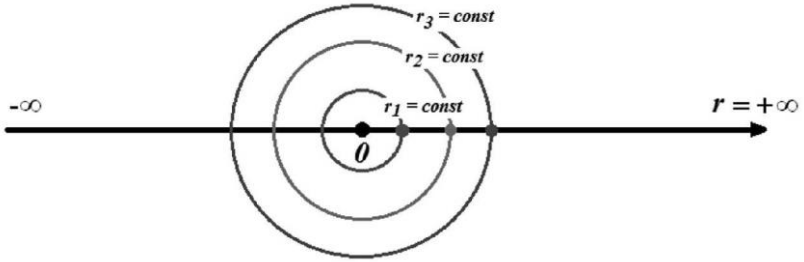


Рис.3. Эквивалентное изображение диаграмм Пенроуза с декартовой координатой. Если отбросить левую часть оси r, то получится эквивалентное изображение диаграммы Пенроуза в полярных координатах

Отметим, что в литературе на всех диаграммах Пенроуза мировые линии условны, поскольку они отображают лишь последовательность положений в пространстве-времени точек (событий). Чаще всего диаграммы используют для отображения эволюции космологических объектов – Черных дыр или коллапсирующих в них нейтронных звёзд.

Такое описание в смысле 2-сфер затеняет главный смысл диаграмм Пенроуза: они описывают поведение только отдельных точек тел, вещества только вдоль одной *единственной* оси. На рисунке рис.3 эти точки для полых 2-сфер выделены. Принято, что поведение всех других точек таких сфер на поверхности, внутри нейтронной звезды или Черной дыры, вокруг них – считается тождественным поведению этой единственной точки данной сферической поверхности. То есть, все точки поверхности такой сферы

отождествляются, поэтому более правильно называть эти точки на диаграмме не 2-сферами, а точками 2-сфер в одном направлении радиуса.

Конформное преобразование, как известно, сохраняет углы между линиями, изменяя их длины и форму. На диаграммах Пенроуза конформное преобразование координат имеет целью сохранить углы наклона нулевых геодезических. Действительно, и на диаграммах Минковского и на диаграммах Пенроуза эти линии имеет угол наклона 45 градусов в любой точке диаграммы. Как следствие, сохраняется форма световых конусов. Однако легко обнаружить, что при этом никакие другие углы не сохраняются, несмотря на конформность. Если изобразить мировые линии двух неподвижных в пространстве тел и пересекающую их световую линию, то на диаграмме Минковского эти две линии образуют с линией света один и тот же угол 45 градусов. На диаграмме Пенроуза эти линии будут иметь форму вертикальных дуговых линий, наподобие линий сетки r = const. Углы между ними и линией света – разные.

Классы диаграмм Пенроуза

Если рассмотреть различные варианты диаграмм Пенроуза в научной литературе, то по способу изображения горизонта событий их можно обобщенно, условно сгруппировать в четыре класса:

а) ромбовидные декартовы диаграммы, не содержащие горизонтов событий – рисунки рис.1 и рис.2. В литературе можно встретить их образное название – "бриллиант Пенроуза". Класс диаграмм этого вида следует рассматривать как основной, первичный, исходный, лежащий в основе всех остальных классов. Как разновидность, к этому классу следует отнести также полярные диаграммы, имеющие вид правой половины декартовых диаграмм;

б) диаграммы для вечной Черной дыры на рис.14 (стр.95), обе левые грани которых являются горизонтами событий и на которых присутствуют две сингулярности; на таких диаграммах возникает анизотропия времени;

в) диаграммы для коллапсирующей нейтронной звезды; верхняя часть такой треугольной диаграммы отсечена, имеет слева сверху горизонт событий 2M, а снизу слева – нулевую ось полярных координат, то есть, по существу, является комбинацией первых двух классов; такая диаграмма неизбежно приводит к разрыву геодезических;

г) многоэлементные, содержащие несколько соединенных друг с другом диаграмм остальных классов, например, пространство-время Райснера-Нордстрема.

Следует отметить, что при наличии некоторых технических, геометрических различий, все без исключения координатные диаграммы являются потомками декартовых координат, их своеобразными клонами. После декартовых координат революционным вариантом систем отсчета можно назвать диаграммы Минковского, используемые в математике теории относительности. Эти диаграммы наглядно демонстрируют фундаментальное положение теории относительности – принцип относительности, провозглашающий равенство всех инерциальных систем отсчета. При этом переходы между системами можно трактовать как поворот системы отсчета на некоторый угол.

Рассматриваемые далее диаграммы Пенроуза тоже не составляют исключения, являясь преемниками как диаграмм Минковского, так и декартовых координат. Главными специфическими чертами диаграмм Пенроуза, как указано, является сжатие бесконечно длинных осей времени и расстояния до конечных размеров. При этом для обеспечения преемственности с диаграммами Минковского это сжатие произведено путем конформного преобразова-

ния координат. Как мы уже отмечали, это проявляется в том, что светоподобные геодезические сохранили угол наклона в 45 градусов. Любая линия, изображенная в декартовых координатах или на диаграмме Минковского с наклоном в 45 градусов, будет точно такой же прямой, наклоненной под 45 градусов и на диаграммах Пенроуза.

Используя все те же средства, что и на традиционных диаграммах Минковского, мы можем изобразить те же самые мировые линии. Для этого нам нужно определить правила конформного преобразования, правила, по которым обычные, декартовы координаты преобразуются в координаты диаграммы Пенроуза. Очевидно, что прямые линии при этом искривляются, кроме светоподобных геодезических, линий распространения света.

Для такого конформного преобразования координат используется преобразование осей координат с помощью уравнений:

$$\begin{aligned} u &= arct(t-r) \\ v &= arctg(t+r) \end{aligned} \qquad (1)$$

где u, v – новые значения координат на диаграмме Пенроуза.

Таким образом, диаграмма Пенроуза – это, в сущности, обычная координатная система *одномерного* пространства. Не следует понимать буквально утверждения, что она отражает пространство 2-сфер (двухмерных сфер), это отражение всего лишь искусственная экстраполяция. Оно ничего не может нам сказать о движении объекта в пространстве параллельно оси *r* или перпендикулярно к ней. Можно задаться вопросом, а почему использованы именно эти сильно нелинейные тригонометрические функции? Дело в том, что из множества элементарных функций только тангенс изменяется в диапазоне от минус бесконечности до плюс бесконечности при изменении ар-

гумента в фиксированном диапазоне (от -90 до +90 градусов). То есть, функционально демонстрирует связь между конечным и бесконечным диапазонами. Поэтому изменение бесконечных расстояния и времени, как аргументов, преобразуется в изменение новых аргументов в ограниченном диапазоне.

Заметим, что поместить бесконечное пространство-время на диаграмме конечных размеров, подобно диаграмме Пенроуза, можно также с помощью других функций, изменяющихся в конечных пределах при изменении аргумента на бесконечном диапазоне. Такими свойствами помимо арктангенса обладает, например, степенной ряд 2^{-n} (2 в степени минус n) и другие. Создать диаграмму, подобную квадратной диаграмме Пенроуза, можно, например, с помощью следующих показательных функций:

$$u = \varphi \times (1 - m^{-n})$$

$$v = \theta \times (1 - m^{-k})$$

На рисунке рис.4 изображена диаграмма, построенная с использованием этих уравнений.

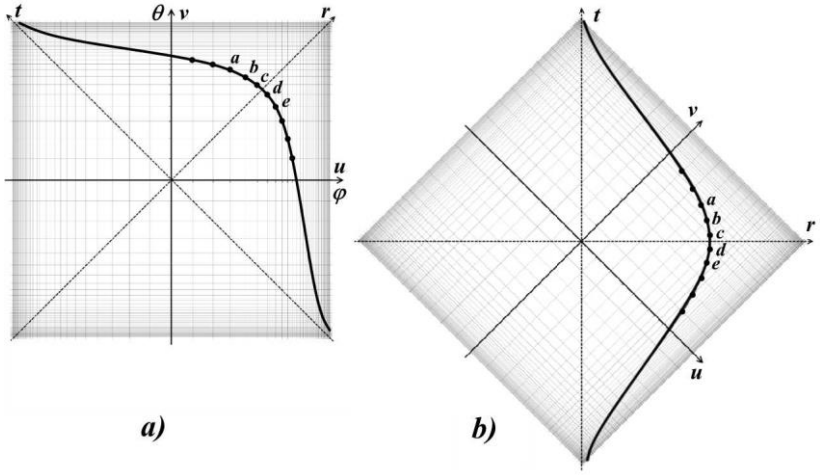


Рис.4. Диаграмма на основе показательной функции

Сразу же видим, что диаграмма визуально ничем не отличается от диаграммы с тангенциальным преобразованием на рисунке рис.5. Для удобства коэффициент m выбран таким, что координатная сетка имеет более равномерное распределение, чем тангенциальная. Утолщённая дуговая линия нанесена на диаграмму таким же способом, как и ранее: соединением диагоналей смежных координатных квадратов, то есть, эта линия для координат u-v является прямой линией. В данном случае координаты её последовательных точек описываются уравнением прямой (дуги) вида $u + v = 11$.

После построения полной координатной сетки из дуг, диаграмму следует повернуть на 45 градусов, вследствие чего дуги становятся координатными линиями $r = \text{const}$ и $t = \text{const}$, а ставшие наклонными прямые линии становятся нулевыми геодезическими. Изображённая на рисунке рис.4b дуга в этом случае становится одной из координатных линий.

Диаграмма в форме ромба (квадрата)

То, что диаграмма Пенроуза в форме ромба (квадрата) имеет сходство с декартовой системой координат наглядно показано на рисунке рис.5. На рисунке изображена обычная система координат Декарта, но оси подвергнуты преобразованию, во многом напоминающем логарифмическую сетку. Главное отличие состоит в том, что логарифмическая шкала имеет бесконечную протяжённость. Здесь же используется преобразование $\varphi = \text{arctg}(x)$, $\theta = \text{arctg}(y)$. Соответственно, по координатам x и y откладываются не эти величины, а их арктангенсы. При изменении параметров x и y в пределах от минус до плюс бесконечности, каждый из параметров φ и θ изменяется в конечном диапазоне от $-\pi/2$ до $+\pi/2$.

На такой двухкоординатной диаграмме Декарта можно изобразить в виде плоскости всю бесконечную Вселенную. На рисунке рис.5а явно не видно, что диаграмма (система координат) является изотропной, поскольку на ней традиционные лучи света изображены кривыми линиями, дугами. Координаты лучей света описываются уравнениями $y = \pm x + C$, то есть, единичному приращению координаты x соответствует такое же единичное приращение координаты y. На координатной сетке эти световые линии являются диагоналями единичных координатных квадратов.

Пометим на рисунке рис.5а точками abcde несколько смежных диагоналей квадратов координатной сетки. Под квадратом понимается прямоугольник со сторонами $x = y = 1$, хотя действительно квадратами выглядят только диагональные.

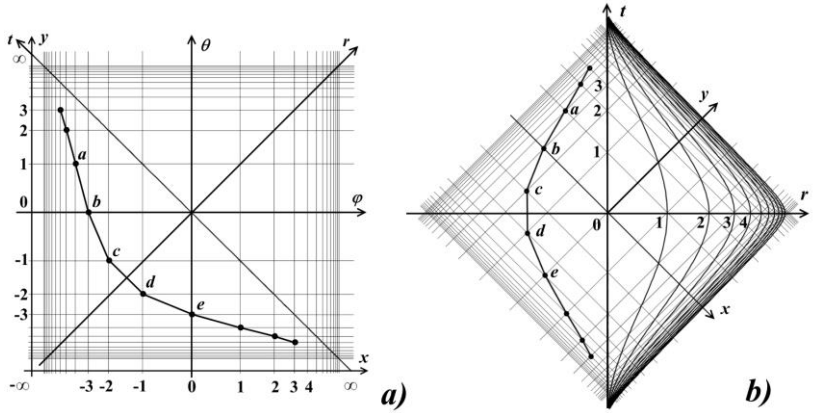


Рис.5. Конформная декартова диаграмма Пенроуза до и после поворота

Тем не менее, аналитически в системе координат x-y рисунка рис.5а любая из таких дуг описывается уравнением $y = \pm x + C$, то есть, является линией с наклоном в 45° к осям этих координат. Это можно отчетливо увидеть по значе-

ниям координат точек abcde. Метрически вдоль осей φ и θ откладываются значения углов, но обозначаются эти точки соответствующими величинами арктангенсов.

Такие же последовательности координат (x, y) можно составить и для всех других возможных точек, в нашем случае с целочисленными координатами, для любой подобной же кривой-дуги на диаграмме. Обратив внимание на явную закономерность, запишем уравнения этих линий в более компактном общем виде:

$$y \pm x = C \qquad (2)$$

Смысл этого уравнения кажется достаточно очевидным: это обобщённое уравнение всех возможных кривых линий на рисунке рис.5а в системе конформных сжатых осей x и y. Значения φ и θ откладываются вдоль тех же осей x и y (оси коллинеарны), но по их собственной шкале от -π/2 до +π/2, в чем, собственно, и состоит конформное сжатие, то есть, диаграмма Пенроуза – это квадрат со сторонами, равными π.

Из уравнения (2) следует, что каждая дуговая линия имеет некий номер C и соответствующее ему уравнение при любых значениях x и y на всей числовой оси. Иначе говоря, константа C является обобщённым обозначением номеров кривых линий. Теперь вспомним, что все эти кривые линии мы построили, соединяя диагонали смежных четырёхугольников. Можно назвать эти линии удлинёнными диагоналями. Но на этом же рисунке видно, что и прямые линии исходной, тангенциальной сетки являются в свою очередь точно такими же удлинёнными диагоналями, если координатной сеткой считать кривые линии, дуги. То есть, наборы прямых и кривых линий являются по отношению друг к другу координатными сетками. Иначе говоря, имея указанную сетку из кривых линий, мы таким же образом

можем построить и прямые линии, просто соединяя диагонали смежных криволинейных четырёхугольников.

Если теперь уже дуги рассматривать как координатную сетку, то обнаружится, что номера дуг остались теми же самыми. То есть, дуга, проходящая через координату xy(3,0) и имеющая, соответственно, номер C = 3, точно также проходит через такую же координату rt(3,0) и имеет точно такой же номер C = 3. Вот здесь мы и обнаруживаем конформную взаимосвязь между координатами x-y и координатами r-t, описываемую уравнениями арктангенсов.

В декартовой системе координат на рисунке рис.5 массивы прямых ортогональных линий и криволинейных условно ортогональных линий образуют каждая своеобразную координатную сетку. То есть, на рисунке рис.5a в качестве координатной сетки мы использовали прямые линии и построили в этих координатах массивы криволинейных линий. Но и, наоборот, эти кривые линии мы можем рассматривать также как линии координат, сетку. На рисунке рис.5a оси координат r-t и их дуга abcde имеют наклон в 45 градусов.

Хорошо видно, что эта диаграмма Декарта на рисунке рис.5a оказалась похожей на квадрат диаграммы Пенроуза на рисунке рис.2, только без поворота (и с единственной дугой). Если теперь эту диаграмму Декарта повернуть на 45 градусов и добавить остальные дуги, мы получим классическую диаграмму Пенроуза. При этом окажется, что бывшие прямые координатные линии превратились в изотропные нулевые геодезические, линии света, а декартовы линии света – в координатные линии диаграммы Пенроуза на рисунке рис.5b. Линейные размеры, координаты новой оси r изменяются в некоторых ограниченных пределах (точнее, от $-\pi/\sqrt{2}$ до $+\pi/\sqrt{2}$), в то же время как каждой из них присваивается значение C:

$$r = arctg(C) \qquad (3)$$

Обратив внимание на то, что знак в выражении (2) соответствует ортогональным дугам, раскрыв его и подставив в выражение (3), мы получаем два уравнения конформного преобразования между координатами r-t и x-y:

$$r = arctg(x + y)$$

$$t = arctg(x - y)$$

Особо отметим обнаруженную интересную особенность рассмотренного метода конформных преобразований координат: поворот сетки позволяет поменять ролями сетку и нулевые геодезические. Нанесение *желаемых* светоподобных геодезических позволяет по ним построить, получить затем соответствующую координатную сетку. Если теперь нанести на полученную диаграмму все обозначения, соответствующие традиционной ромбовидной диаграмме Пенроуза с бесконечными границами и все дуги, мы получим диаграмму, показанную на рисунке рис.2.

Здесь мы наглядно видим сущность конформного преобразования на диаграммах Пенроуза. На рисунке рис.5а вертикальные и горизонтальные *прямые* линии образуют нелинейную координатную сетку. Мы принимаем скорость света равной единице c = 1. Производная уравнения движения какого-либо объекта – это его скорость. Для света можно записать

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = v(t) \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 1$$

Здесь производная – это тангенс угла наклона графика к вертикальной оси на диаграмме, к оси времени. Условно говоря, график движения света проходит диагонально через "квадратики" координатной сетки. Это демонстрирует линия abcde на рисунке рис.5а. Понятно, что при нелинейной градации координатной сетки "квадратики" условны, визуально все они являются прямоугольни-

ками. Тем не менее, график света всё равно проходит диагонально через эти прямоугольники. То есть, линия abcde является линией света. В таком виде она, во-первых, не выглядит конформной, наклонённой под 45 градусов, а, во-вторых, сильно искривлена. Однако между этой линией и координатной сеткой есть однозначная связь: в каждом "квадратике" конформность и прямолинейность линии просматривается отчётливо.

Для нас, в сущности, не имеет значения, как выглядит координатная сетка, для нас важно, чтобы линии света были конформными, изотропными. И здесь следует отметить гениальную догадку Картера-Пенроуза. Они заметили, что координатная сетка выглядит как изотропные линии света, если за оси координат взять диагональные линии. Для этого нужно просто повернуть квадрат на 45 градусов, как показано на рисунке рис.5b. Теперь бывшие ранее координатной сеткой линии все стали выглядеть как изотропные линии света. Все они наклонены под 45 градусов и строго прямолинейны.

Бывшие ранее линиями света криволинейные линии, в частности, линия abcde сохранили строго однозначную связь с теперь уже прямолинейными линиями, которые теперь можно считать линиями света. То есть, эту криволинейную сетку мы можем, соответственно, рассматривать как координатную. Поставленный на диагональ квадрат теперь отвечает главному требованию: диагональные линии на нём стали изотропными линиями света. Они прямолинейны и имеют угол наклона в 45 градусов.

2М-диаграмма Пенроуза

Из полученной диаграммы мы так же можем сформировать и так называемое максимально расширенное решение Шварцшильда для вечной Чёрной дыры – рисунки

рис.14 и рис.6f, содержащее сингулярности и параллельную Вселенную. Для этого необходимо заменить обозначения $r = -\infty$ на $r = 2m$. Понятно, что на оси $i^0 i^0$ значения $r = const$ также следует заменить на соответствующие. Диаграммы с левым значением 2m назовём 2M-диаграммами Пенроуза.

На диаграммах этого вида сразу же обнаруживается противоречие: на такой диаграмме невозможно корректно произвести разметку координатных линий времени. Иначе говоря, на диаграммах с левым горизонтом событий $r = 2m$ *равномерная* шкала времени $t = const$ становится невозможна. В первую очередь это связано с тем, что разметка линий $r = const$ потребовала специфического подхода: шаг, расстояние между двумя линиями $r = const$ на всём протяжении диаграммы неизменным сделать невозможно.

Действительно, чтобы обеспечить традиционный вид координатной сетки, мы должны слева и справа диаграммы нанести одинаковое количество дуг $r = const$. Но слева диапазон расстояний конечен и равен некоторому количеству координатных дуг, а справа – он бесконечен. Какое бы определённое значение для центральной оси $r_0 = const$ мы ни выбрали, кроме $r_0 = \infty$, интервал слева также будет конечным. Но главная проблема не в этом. Поскольку левая часть диаграммы – это горизонт событий Чёрной дыры $r = 2m$, дискретность координатной сетки должна экспоненциально уменьшаться. Чем ближе к горизонту, тем мельче деления шкалы, интервалы между линиями. Это исключает любую возможность установить их конечное количество, которое стремится к бесконечности. Справа от центра диаграммы число координатных линий также стремится к бесконечности, но дискретность этой сетки может быть как постоянной, так и экспоненциально изменяющейся – возрастающей или убывающей. В любом случае пределом этой шкалы должна быть бесконечность.

Можно воспользоваться следующим очевидным способом преобразования на квадратной диаграмме левого бесконечного горизонта в конечный. Это простое вытягивание, смещение линии координатной сетки r = 2m до положения левого горизонта событий. Остальные линии сетки левее этой просто "выталкиваются" за пределы диаграммы, как показано на рисунке рис.6. Однако анализ показал безуспешность этого способа.

Как показано на рисунке стрелкой, координатная времениподобная линия r = 2m скачкообразно, пошагово перемещается сначала в нулевую позицию в центре диаграммы, затем в точки -1m (рис.6b), -2m (рис.6c), -4m (рис.6d), -7m (рис.6e), -10m (рис.6f). При этом в центре диаграммы поочерёдно оказываются координатные линии, соответственно, r = 3m, r = 4m, r = 6m, r = 9m, r = 12m. Разметка сетки при этом сохраняет свой исходный изотропный и конформный вид. Все нулевые геодезические и световые конусы, как ожидается, также сохраняют свои традиционные свойства.

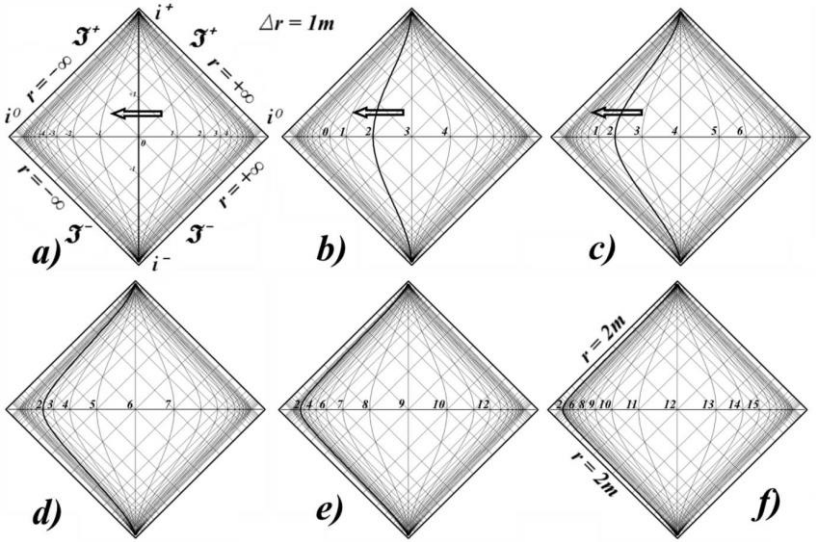


Рис.6. Преобразование диаграммы в 2M-диаграмму

Очевидно, что после завершающего перехода координатной линии $r = 2m$ на позицию левого горизонта событий, в центре диаграммы окажется координатная линия со значением $+\infty$. Также очевидно, что никакие геодезические на *конечном* удалении от горизонта событий в этом случае изобразить на такой диаграмме будет уже невозможно: все они сожмутся в бесконечно тонкую линию вблизи левого горизонта событий. С другой стороны, сдвигаемая влево времениподобная координатная линия $r = 2m$ никогда не превратится в светоподобную линию *горизонта событий*, в пределе оставаясь от неё на планковском удалении. В этом случае очевидно, что любое изображённое на диаграмме событие или движение не будет иметь никакого отношения к горизонту событий Чёрной дыры. Движение даже к его отдалённой окрестности, например, до $r = 1\,000m$ будет длиться вечно, только внешне напоминая падение на горизонт $r = 2m$. Визуально, ввиду мелкой детализации, будет *казаться*, что эта линия является корректным горизонтом событий (рис.6f), но при увеличении масштаба (как под микроскопом) фактически не будет никакого различия для значений этих промежуточных "горизонтов". В равной степени мы можем поставить возле них вместо $r = 2m$ как $r = 2\,000m$, так и $r = -\infty$, характер диаграммы будет в точности таким же. В целом эта диаграмма становится тождественной обычной диаграмме с двумя пространственноподобными бесконечностями, обозначенными как i^0.

Ещё одной серьёзной проблемой является то, что из-за различной дискретности сетки слева и справа диаграммы, использовать постоянные значения интервалов на *всей* шкале невозможно. Конечность интервала слева исключает такую возможность. То есть, мы в принципе можем установить шаг делений справа $\Delta r = 1 = const$, либо

иной другой постоянный шаг. Но на левой стороне диаграммы никакой постоянный шаг невозможен. Получается, что сетка диаграммы должна быть размечена двумя *разными* шкалами, что, очевидно, весьма неудобно.

Однако есть вариант компромиссной шкалы, единой на *всём* диапазоне расстояний. Это шкала r, размеченная степенным рядом. Каждому делению шкалы присваивается значение $2+2^n$, где n – номер линии r имеет значения от $-\infty$ до $+\infty$. На такой диаграмме для наглядности центру может быть приведена в соответствие, например, координата r = 4m, соответствующая номеру n = 1.

В литературе на такие 2М-диаграммы координатная сетка наносится крайне редко, а если и наносится, то условно, без каких-либо обозначений, шкал. При этом светоподобные геодезические и световые конусы используются широко. Поэтому попытка аналитически построить соответствующую координатную сетку вполне оправданна. Выбор уравнения степенного ряда для сетки r = const позволил вполне приемлемо такую сетку построить.

Однако компромиссная шкала имеет собственную проблему. На диаграммах с такой шкалой оказалось невозможным корректно изобразить световые конусы, поскольку на них светоподобные геодезические оказались *кривыми* линиями. Проблема вызвана тем, что на такой диаграмме невозможна равномерная шкала времени – возникает так называемая анизотропия времени.

Алгоритм построения диаграммы Пенроуза

Исходя из возможных видов координатных параметров в трёхмерном пространстве, можно выделить четыре различные системы координат. Параметрами, задающими однозначное положение объекта в трёхмерном *пространстве* должно быть три. При использовании в ка-

честве таких параметров линейных отрезков – ρ или углов – φ, можно сформировать четыре группы, четыре набора координатных параметров:

3ρ+0φ (три линейных параметра и ни одного углового). Это обычная декартова система ортогональных координат;

1ρ+2φ – это классическая полярная система координат;

0ρ+3φ – это широко применяемая в астрономии, космологии система координат, которая в такой формулировке явно, детально нигде не описана;

2ρ+1φ – система координат, об использовании которой ничего не известно.

Декартова и полярная системы координат широко известны, и в пояснениях, видимо, не нуждаются. Третья система, космологическая использует, в частности, три опорные, реперные точки, образующие треугольник с известными сторонами. Из этих точек определяются три координатных угла до исследуемого объекта в космосе, в результате чего образуется треугольная пирамида, в которой можно вычислить длины её граней. Может возникнуть ощущение, что на самом деле используется 6 параметров. Но стороны реперного треугольника на самом деле не влияют на величину удалённости объекта в космосе и на расстояния между ними.

Декартова, ортогональная система координат имеет разновидности по используемой градации, разметке осей. Чаще всего это линейные, равномерные градации. Также часто используются оси с логарифмической градацией. Эти системы позволяют отобразить объекты и процессы конечной протяжённости. Рассматриваемые диаграммы Пенроуза являются вариантом декартовой системы координат в обычном смысле этого понятия, шкалы осей которой

"скомпрессированы", то есть, сжаты по определенному алгоритму. По аналогии с понятием "логарифмическая" шкала, такой алгоритм можно назвать алгоритмом "тангенсического" сжатия. Понятно, что в данном случае для сжатия шкалы вместо функции логарифм используется функция тангенс, вернее, его обратная функция – арктангенс. Процесс такого сжатия шкал или процесс конформного преобразования представляет собой, по сути, построения новой шкалы для координат расстояния r и времени t как функции от этих переменных в некоторой исходной системе координат u-v (1). Иначе говоря, мы строим в системе координат u-v семейство линий, которые образуют новую координатную сетку. При этом из уравнений видно, что новая сетка оказывается заключенной в квадрат со стороной π, поскольку при изменении величин r и t в диапазоне от минус до плюс бесконечности, функции u и v изменяются в диапазоне от минус π/2 до плюс π/2.

Для нанесения координатной сетки сначала для каждого значения t = -n, …, -2, -1, 0, 1, 2, …, n строится сплошная линия r = -m…m. При этом на диаграмму наносятся дуговые линии, вытянутые от i^- к i^+. Затем для каждого значения r = -m, …, -2, -1, 0, 1, 2, …, m строится сплошная линия t = -n…n. При этом на диаграмму наносятся дуговые линии, вытянутые между точками i^0.

При таком построении сетка одной из осей будет иметь вид рисунка рис.7а. Как видно на рисунке, сетка получилась с наклоном. Для наглядности на сетке показаны действительные оси координат u-v, в которых она построена, и конформные оси t-r, которые и предполагается использовать в дальнейшем. Для приведения масштабной сетки к обычному виду, когда её нулевая ось расположена либо вертикально, либо горизонтально, полученную сетку нужно просто повернуть на 45 градусов против часовой

стрелки. В этом случае мы получим сетку оси времени t, как показано на рисунке рис.7b. После этого мы можем нарисовать по указанным уравнениям конформного преобразования вторую масштабную сетку и повернуть её теперь на 45 градусов по часовой стрелке. В результате мы получим сетку оси r, как показано на рисунке рис.7c. Объединив эти обе сетки, мы получим полную сетку диаграммы, как показано на рисунке рис.7d. Теперь мы можем нанести на рисунок все необходимые обозначения, в результате чего будет получена полная "пустая" диаграмма Пенроуза, как показано на рисунке рис.7e. Слово "пустая" означает, что на диаграмме нет никаких событий, мировых линий.

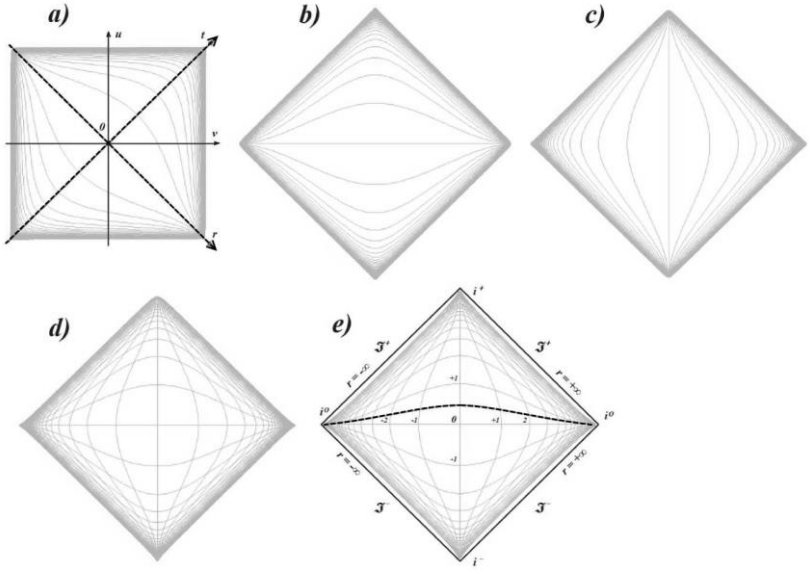


Рис.7. Последовательность создания "пустой" диаграммы Пенроуза

Собственно алгоритм построения сеток достаточно прост. Для удобства поворот сеток производится сразу же, в момент их построения. Поскольку алгоритм прост, приведем его в неформальном виде, в виде словесного описания:

Цикл 1: Для каждого –M < t < +M с шагом T

Цикл 2: Для каждого –M < r < +M с шагом R

Вычислить u = arctg(t + r) и v = arctg(t - r)

Повернуть полученную точку a(u, v) на 45 градусов по или против часовой стрелки (зависит от назначения линий сетки – время или расстояния)

Вывести полученную точку a(u, v) на координатную плоскость

Конец Цикла 2

Конец Цикла 1

Буквой M названа условная бесконечность, то есть, число большое, но не превышающее возможностей вычислительной системы (компьютера). Шаг T подбирается из соображений частоты линий на диаграмме. Слишком много линий просто затемнят картину.

Теперь на диаграмму можно вывести любые события и мировые линии. Для этого используется точно такой же алгоритм, но только его "внутренняя часть", без циклов. По требуемой функциональной зависимости мы выводим последовательность точек a(u, v) (с поворотом!) и при необходимости соединяем их отрезками линий. Частота вывода линий – это темп реального хода времени, если мы создаем анимацию. Интервалы, очевидно, должны быть достаточно малыми, чтобы была незаметна ломаная структура линий. На рисунке рис.7 дискретность каждой дуговой линий составляет R = 800, поэтому они выглядят как гладкие кривые. Для наглядности на анимации добавлена ещё одна линия – линия настоящего $t = t_{наст}$. У нас она обычно окрашена в оранжевый (горчичный) цвет, но здесь на черно-белом рисунке рис.7 она обозначена толстой штриховой линией. Мировые линии событий могут иметь произвольные цвета. Мировые линии света и тахионов имеют предпочтительные цвета – красный, малиновый.

Динамические диаграммы Пенроуза

Теперь, имея уравнения преобразования координат, мы можем изобразить на диаграмме Пенроуза любую мировую линию. Для этого нам нужно знать только уравнение её движения $r(t)$. Более того, мы можем нарисовать последовательность диаграмм для каждого момента времени по этим уравнениям и соединить их в анимацию, динамическую последовательность кадров. Пример кадра такой анимации для четырех разных мировых линий изображен на следующем рисунке:

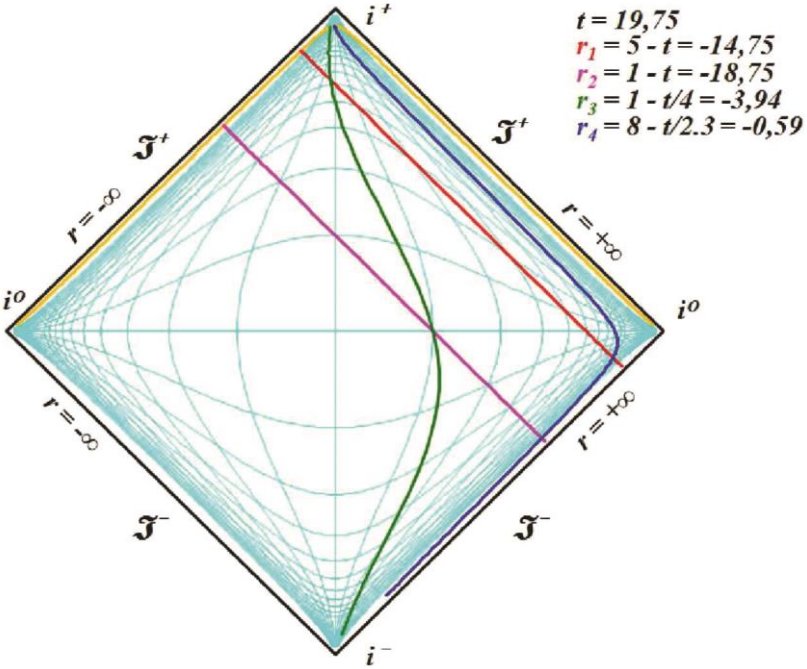


Рис.8. Мировые линии на динамической диаграмме (анимация [81])

На кадре из динамической диаграммы рис.8 изображены четыре произвольные мировые линии, имеющие начало в момент времени t = -20, где размерность времени

может быть произвольной, как указано выше. Две из линий – светоподобные и соответствуют лучам света, испущенным в точках $r = 1$ и $r = 5$, причем размерность расстояния соответствует размерности времени.

Другими словами, если расстояние измеряется в световых годах, то время – в годах; если время в минутах, то расстояние – в световых минутах и тому подобное. Для каждой мировой линии на рисунке приведены их уравнения, а на диаграмме цвет линии соответствует цвету названия функции.

Понятно, что в динамике мировые линии могут начинаться в любой точке диаграммы ниже линии настоящего, а заканчиваться должны на ней. Никаких событий выше линии настоящего не может быть, только ожидаемые, предполагаемые, которые могут произойти в будущем.

Как видно на динамической диаграмме, мировые линии пересекаются. Это означает, что испущенные световые лучи или времениподобные объекты (тела) встречаются в одной точке одномерного пространства-времени, двигаясь вдоль одной линии. Столкновение тел или поглощение лучей определяется тем, в каком направлении они движутся, что можно явно вычислить по уравнениям их мировых линий.

В качестве примера попробуем задать уравнение мировой линии такое, чтобы она проходила вблизи центра диаграммы. Как и в полярных координатах, на этой диаграмме изображено всё существующее пространство-время: и видимая Вселенная, и вся Вселенная за видимым горизонтом, от Большого Взрыва и до конца нашей реальности, ничто не может быть изображено вне диаграммы.

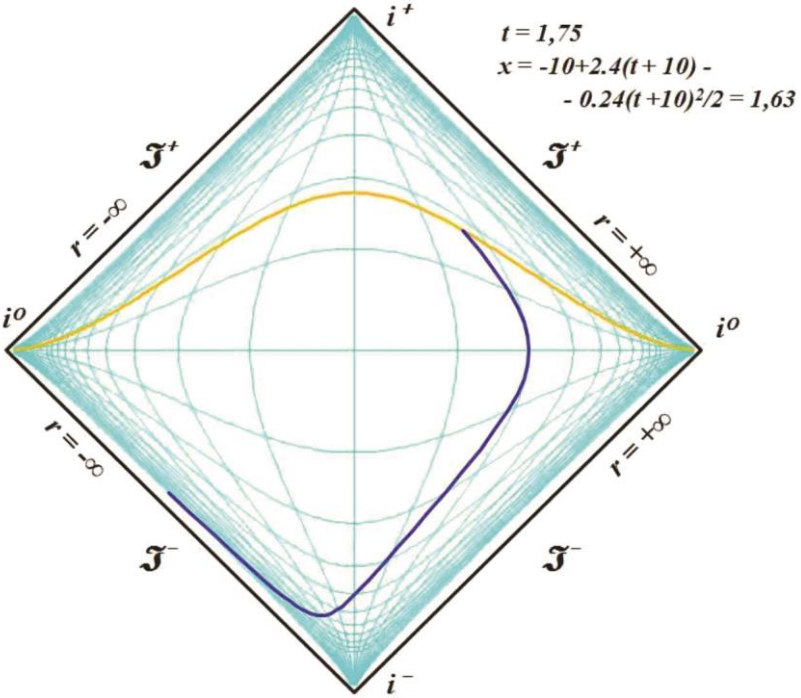


Рис.9. Пример мировой линии на динамической диаграмме Пенроуза по уравнению, рассчитанному из заданных условий (анимация [81])

Синим цветом изображена мировая линия события по выведенному уравнению, которое приведено в правом верхнем углу диаграммы. Значение уравнения на рисунке вычислено для момента времени t = 1,75. Можно заметить, что на нижнем отрезке траектории тело движется по пространственноподобной траектории, то есть, со сверхсветовой скоростью, как тахион. Проверку на корректность уравнения движения для построения диаграммы должен производить его автор, отслеживая скорость тела. Разумеется, "отсекать" недопустимые значения траекторий может и алгоритм автоматизированного, компьютерного построения диаграмм.

Динамическая диаграмма обмена фотонами

Как правило, чаще всего диаграммы Пенроуза используются в общей теории относительности при рассмотрении неинерциального (с ускорением) движения или движения с учетом гравитационных сил, например, действия космологических Черных дыр. Однако нет никаких препятствий для использования их и для исследования инерциальных систем отсчета – ИСО.

В этом случае следует формировать столько диаграмм, сколько на ней имеется инерциальных участников движения. Рассмотрим случай обмена световыми сигналами теперь уже для двух таких ИСО – А и В. Диаграммы в виде кадра из анимации представлены на рисунке рис.10.

На рисунке представлены диаграммы, полностью соответствующие диаграммам Минковского. Слева – ситуация с точки зрения неподвижного наблюдателя ИСО В, справа – ИСО А.

В некоторый момент времени из ИСО В испускается световой сигнал r_3, который достигает ИСО А. В этот же момент времени оттуда отправляется ответный световой сигнал r_4. Через какое-то время этот сигнал достигает ИСО В.

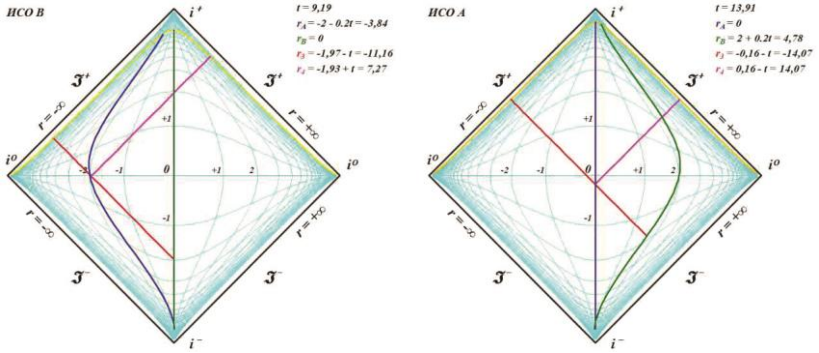


Рис.10. Диаграммы Пенроуза для двух ИСО, обменивающихся световыми сигналами (анимация [81])

Для проверки принципа относительности мы находим явным образом координаты всех известных нам точек излучения и получения сигналов. При этом мы знаем, что отрезки времени в ИСО B сократились по сравнению с отрезками времени в ИСО A. Мы можем вычислить и точку начала отсчета, когда две ИСО находились рядом, и коэффициент лоренцева сокращения.

После внесения в алгоритм программы этих точек и запуска программы мы видим, что всё в точности соответствует описанной картине в ИСО A. Сначала из ИСО B излучается луч r_3, после получения которого в ИСО A излучается ответный сигнал r_4. Все точки находятся на мировых линиях участников, никаких разрывов нет.

Таким образом, видим, что в данной задаче диаграммы Пенроуза полностью соответствуют диаграммам Минковского [70], в частности, непротиворечиво демонстрируя картину обмена световыми сигналами. Вместе с тем, ромбовидные диаграммы Пенроуза в этой традиционной области теории относительности явно проигрывают обычным диаграммам Минковского просто по причине своей слабой наглядности и крайне криволинейной графики. Сжатие бесконечной области пространства-времени в рисунок конечных размеров не только не дает никакой новой информации, но и заметно усложняет восприятие, извлечение информации классической.

Произвольные фигуры на диаграмме

Как отмечено, диаграммы Пенроуза принципиально ничем не отличаются от традиционных, классических декартовых систем координат. Поэтому их можно использовать таким же образом для любых графических построений. Поскольку координатная сетка на диаграммах Пенроуза криволинейная, такие фигуры и графики выглядят до-

вольно-таки экзотически, как показано на рисунке рис.11. Координатная сетка, линии удалены.

Например, отрезок синусоиды $t = \sin(r)$ примерно в 10 - 12 периодов выглядит как сигнал, амплитуда которого сначала возрастает, затем убывает, а частота, наоборот, сначала уменьшается, затем возрастает. При этом форма синуса непривычно искривлена.

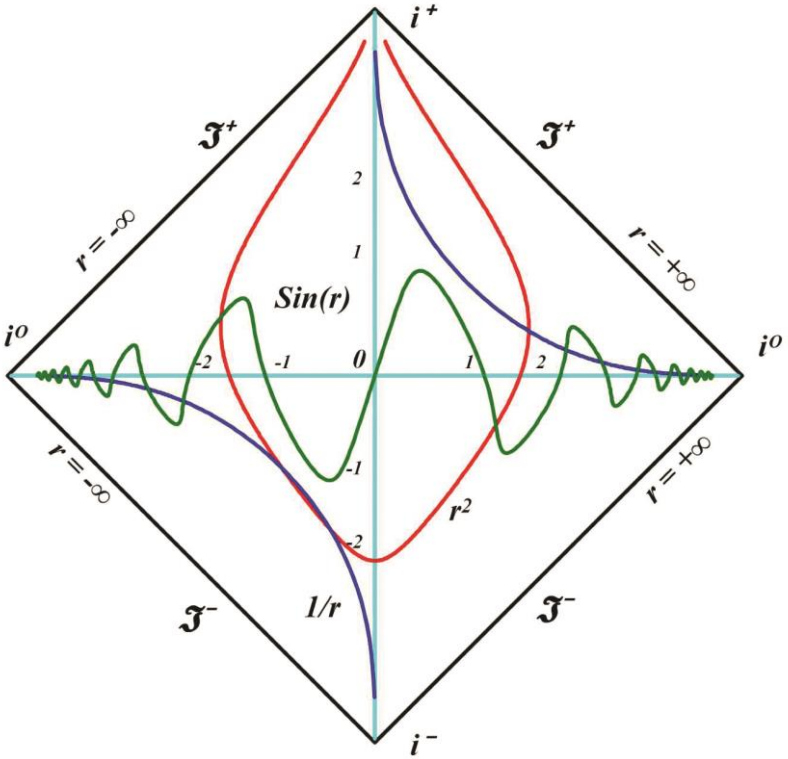


Рис.11. Изображение на диаграмме Пенроуза графиков функций – sin(r), гиперболы 1/r и параболы r^2

Более привычный вид имеет гипербола $t = 1/x$. Два отрезка ветвей гиперболы в первом и третьем квадрантах отчетливо напоминают дуги окружности, но это гиперболы.

Еще более непривычный вид имеет отрезок параболы $t = x^2$. На довольно незначительном интервале изменения аргумента парабола имеет каплевидную или линзообразную форму.

Понятно, что на диаграмме можно изобразить все эти графики функций полностью – в диапазонах изменения аргумента и функции от минус до плюс бесконечности.

Добавим, что универсальными изобразительными свойствами обладают также и другие релятивистские системы координат, например, координаты Крускала. В этих координатах размеры фигур ограничены рамками полотна, координатной сетки. Для примера на рисунке рис.12d-g также условно изображены традиционный гиперкуб – тессеракт, синусоида и секундомер, который аналитически, в уравнениях представляет собой обычную окружность.

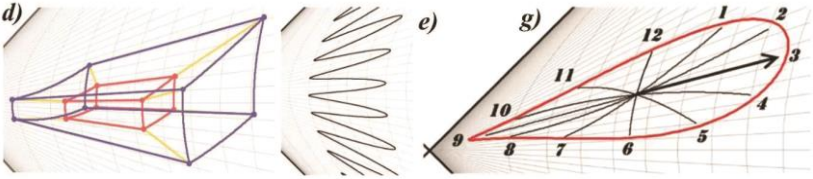


Рис.12. Фигуры на диаграммах Крускала

Очень интересно на диаграмме Пенроуза выглядит наипростейшая геометрическая фигура – круг. На рисунке рис.13 он изображен в виде стилизованного секундомера, который приобрел довольно забавные очертания, деформируясь в некоторое подобие квадрата.

Цветной оригинал этого рисунка приведён здесь на странице 15. Трудно представить, но на рисунке действительно изображен круг с вращающейся внутри стрелкой. Особенно забавно картина выглядит на анимации. В процессе движения по окружности стрелка постоянно изгибается – образуя горб то по ходу движения, то против него. И только в четырех точках своей траектории стрелка пре-

вращается в прямую линию – на светоподобных траекториях. Как и в случае диаграммы с бесконечными горизонтами, 2М-диаграмма так же является просто координатной системой, ничем принципиально не отличающейся от декартовой. Поэтому и здесь мы вполне можем рассматривать в качестве координат не время и радиус, а обычные декартовы координаты x-y.

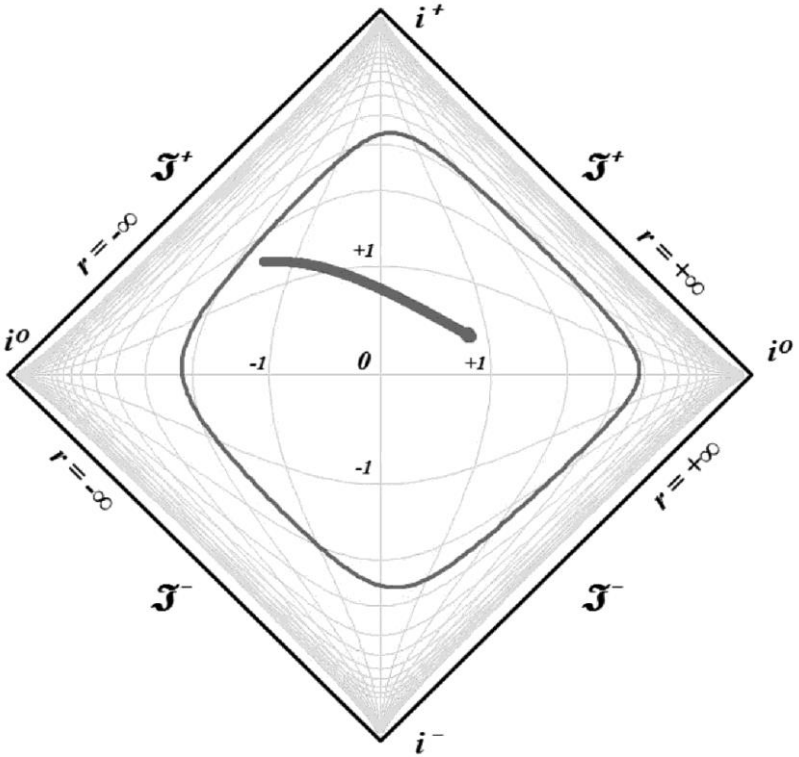


Рис.13. Диаграмма Пенроуза для вращающейся в круге стрелки (анимация [81])

Однако в этом случае возникает интересный вопрос. На таких 2М-диаграммах Пенроуза имеется обнаруженная ранее право-левая анизотропия, полярность времени [76]. Интересно выяснить, каким образом она проявится в этом

координатном случае? Каждому значению x, согласно анизотропии диаграммы, должны соответствовать два разных значения y. Для уравнений "прямых" линий всё, вроде бы, останется по-прежнему – величина зависит от скорости изменения функции. Но как быть с единичной точкой, об истории которой ничего не известно?

Допустим, нам нужно изобразить два отрезка с одинаковыми координатами концов. Очевидно, что точки отрезка будут изображаться последовательно, а это уже движение, имеющее и направление и скорость. Вот его и можно использовать. Однако это не обязательно. Если использовать оба значения параметра анизотропии m, то будут изображены два симметричных, зеркальных объекта. Эти объекты зеркальны относительно оси m = 0, а их диаграммные координаты однозначно определены соответствующими параметрами анизотропии m и n.

Таким образом, имея функции преобразования, можно построить любую геометрическую фигуру. Давайте построим "секундомер", такой же, как на диаграммах с бесконечными горизонтами на рисунке рис.13.

Построение "секундомера" можно произвести симметрично как с пересечением двух изображений друг с другом, так и без пересечения, когда каждое из изображений будет полностью находиться в одной из областей – выше или ниже оси m = 0. Мы построим только одно полноразмерное изображение каждого из выбранных объектов для одного из значений знака m, рисунок рис.14.

На рисунке изображены три объекта – две окружности, внутри которых вращаются стрелки – указатели, наподобие секундомеров, и группа из концентрических окружностей. Отметим со всей определенностью, что на рисунке изображены только *окружности* (и пара стрелок – указателей). Левая, каплевидная синяя окружность имеет

радиус R = 0.6, а центр её расположен в точке с координатами x = 3, y = 0.1. Длина указателя или радиус окружности, которую описывает его конец, равны 0.53. Параметр преобразования m имеет положительный знак. Все геометрические параметры фигур, их размеры выбраны такими, чтобы они занимали достаточно большую область рисунка.

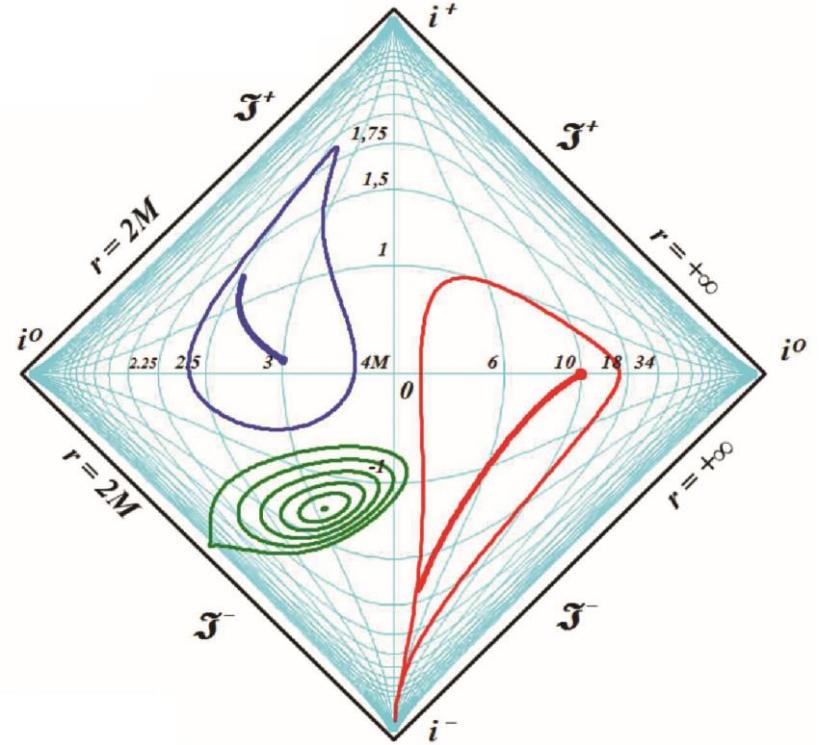


Рис.14. Секундомеры на координатной 2M-диаграмме (анимация [81])

Обратим внимание, что диаграмма явно "чувствует" знак параметра, поскольку в данном случае указатель секундомера на анимации движется в правильном направлении, по часовой стрелке. Однако, если мы принудительно поменяем знак параметра, то картинка просто перевернётся,

зеркально отразившись от оси x. В этом случае направление движения указателя также изменится на противоположное.

Этот переворот виден на правой стороне диаграммы. Фрагмент отдаленно напоминает картину "Твердость памяти" Сальвадора Дали с "плавящимися часами". У нас на диаграмме, как и выше, так же изображен круг, в котором вращается стрелка – указатель. Параметры окружности: радиус $R = 5.66$, а центр имеет координаты $x = 10$, $y = 0$. Длина указателя или радиус окружности, которую описывает его конец, равны 5,6.

Знак параметра m выбран отрицательным и диаграмма это вновь "почувствовала", направив вращение указателя против часовой стрелки. Если для этой окружности мы выберем знак параметра m положительным, то "секундомер" просто отразится зеркально от оси x, а указатель будет вращаться, как положено – по часовой стрелке. Слева внизу диаграммы для наглядности изображена группа концентрических окружностей.

Все визуальные деформации связаны исключительно с криволинейностью системы координат 2M-диаграммы.

Заключение

Итак, основная, фундаментальная сущность диаграмм Пенроуза состоит в отображении на квадрат конечных размеров бесконечного *одномерного* пространства-времени. По сути, это обычная координатная система одномерного пространства, поскольку время не является *пространственной* координатой. Используя все те же средства, что и на традиционных диаграммах Минковского, мы можем изобразить те же самые мировые линии.

Используя уравнения преобразования координат, мы можем изобразить на диаграмме Пенроуза любую мировую

линию, график вообще любой функции *целиком*. Для этого нам нужно знать только уравнение её движения $r(t)$. Более того, мы можем нарисовать последовательность диаграмм для каждого момента времени по этим уравнениям, которые затем можно соединить в динамическую последовательность кадров, в анимацию.

Показательная функция для 2М-диаграммы

Диаграмма Пенроуза для вечной Черной дыры

В литературе можно встретить наглядные графические иллюстрации процесса коллапса нейтронной звезды – так называемые диаграммы Пенроуза для вечной черной дыры. Можно заметить, что на этих диаграммах не всегда есть подпись, обозначающая горизонт событий r = 2M. Это либо скрещивающиеся линии в центре диаграммы, либо её левые ограничивающие горизонты. Смысл этих горизонтов понятен – это предельные расстояния, до которых могут дойти геодезические, после чего они падают на сингулярность. Здесь мы не будем рассматривать эти сингулярные процессы, а рассмотрим лишь саму возможность создания таких диаграмм, поскольку есть сомнения в возможности сочетать приписываемые им свойства, обозначения. Весьма красочно и наглядно такая диаграмма изображена на следующем рисунке

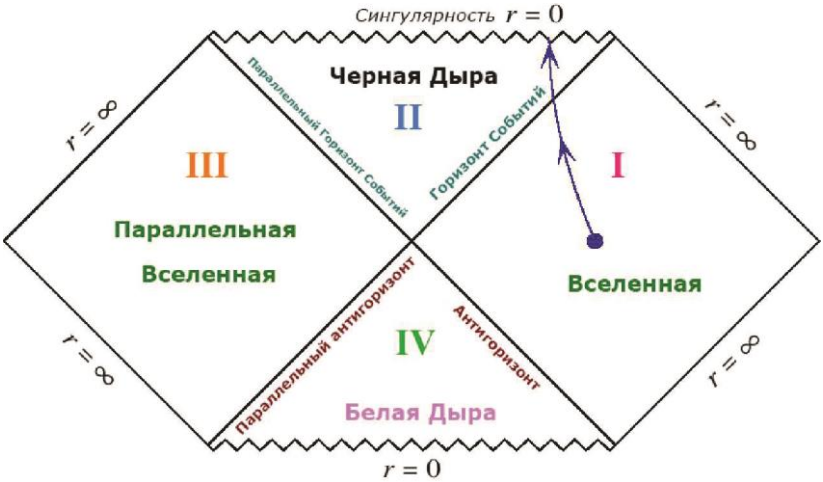


Рис.1. Диаграмма Пенроуза для Черной дыры [45].

Приведённая на рисунке диаграмма соответствует традиционному изображению диаграммы шварцшильдовской Черной дыре. Горизонты событий Черной дыры, изображённые линиями, пересекающимися в центре, помечены текстовыми обозначениями "Горизонт событий" и подобные. Значение координаты этих горизонтов должны быть обозначены как r = 2M.

Рассмотрим эти горизонты внимательнее. Первый вопрос, который они вызывают, а чему равна координата центра правого ромба (квадрата)? Вряд ли удастся найти в литературе и интернете эту информацию. Но для реалистичных построений без неё невозможно обойтись. Действительно, слева координаты нам точно известны – это 2M. Справа – бесконечность. Отсюда с неизбежностью следует, что мы определенно можем присвоить центру квадрата какое-то конечное значение координаты r. По большому счету, это значение мы можем выбрать любым, на свой вкус. Можно 10M, можно 1 000M и даже 10^{16}M или 10^{-16}M. Это не противоречит смыслу рисунка. Просто этим выбором мы как бы устанавливаем своё удаление от горизонта Черной дыры, считая своё положение в центре координат. Можно взять значение r = 2.125M или 4M, допустимо всё. Однако, последнее значение более предпочтительно, поскольку имеет довольно хороший смысл. Рассмотрим подробнее преобразование уравнения геодезической для показательной шкалы.

Уравнение геодезической для показательной шкалы

Дело в том, что две половины диаграммы Вселенной (область I) неравноценны в смысле шкалы расстояний. Нам ведь нужно нанести на диаграмму сетку, деления по оси r, гарантировав при этом конформность и горизонты. Угол наклона всех светоподобных геодезических должен быть

равен 45 градусам. Равномерная сетка при этих условиях невозможна в принципе. Вправо мы можем легко нанести деления с интервалом, например, в 1М. В этом случае деления, согласно уравнениям конформного преобразования, будут укорачиваться по мере удаления вправо на бесконечность. Но влево это не так наглядно, там всего два целочисленных деления или конечное их количество. При этом мы точно знаем, что последнее деление пройти вообще невозможно, оно является горизонтом. Чем ближе мы будем к горизонту, тем медленнее будем к нему приближаться. Построить такую геодезическую, имея всего одно (или несколько) деление на интервале, не просто проблематично, а невозможно.

Можно поступить следующим образом. Вправо, как мы видели, деления отображают одинаковые интервалы, но изображены разными отрезками. Шкалу влево мы так же можем разметить отрезками разного размера. Только они уже не будут отображать одинаковые интервалы. Для того, чтобы уложить на левой стороне длиной 2 бесконечно большое число интервалов, нужно, чтобы в сумме они давали ровно 2, то есть, шкалу от 2 до 4.

В математике такая последовательность хорошо известна, это степенной ряд 2^{-n}. Сумма этого бесконечного ряда равна 2, что нам и нужно. Значения делений, то есть, метки на оси r будут иметь вид:

2М … 2.03125М, 2.0625М, 2.125М, 2.25М, 2.5М, 3М, 4М

Шкала заканчивается числом 4М в центре области I. Легко заметить, что длины отрезков (интервалы) и есть значения членов ряда 2^{-n}

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+...+\frac{1}{2^{\infty}}=2$$

Такая "красивая", целочисленная в степенях двойки шкалы описывается простым уравнением $y(n) = 2^{-n}$. Номера

делений шкалы справа налево будут соответствовать номерам n, а значения делений – соответствующим числам 2^{-n}:

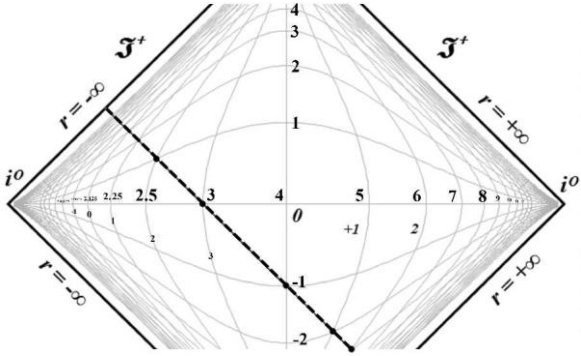
$$1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+...$$

При этом возможны все промежуточные, нецелые значения параметра n. Алгоритм преобразования текущих значений r в новые r_n простой функциональный $r_n = 2^{-r}$. То есть, чтобы найти деление, соответствующее некоторому значению r, нужно просто возвести в степень r основание 1/2. При бесконечном возрастании текущих координат события, преобразованные координаты r будут, как видим, стремиться к горизонту событий r = 1. Следовательно, граница разделения шкалы r на такой диаграмме Пенроуза – это значение 3M. При больших значениях, до этой точки r_n = r, а после него, меньших, чем 3M – преобразованные по указанному уравнению.

Таким образом, на рассматриваемую диаграмму мы наносим линии сетки r точно так же, как на обычную диаграмму Пенроуза [72], отображающую всё пространство-время, но метки делений указываем иначе. Однако в этом случае возникает другая проблема – как нам изображать геодезические при пересечении границы раздела r = 3M? Действительно, если мы будем строить светоподобную геодезическую влево, то её любое уравнение будет давать значения, заведомо превышающие r = 2. Например, уравнение r = 3 - t. Уже в момент времени t = 1, координата окажется в точности на горизонте событий. А дальше?

Шкала расстояний получилась вполне корректной, но теперь нам нужно как-то "уложить" в этот интервал геодезические бесконечной длины по их уравнениям. Для того, чтобы разобраться с этим, рассмотрим рисунок рис.2. На рисунке изображена сформированная нами диаграмма Пенроуза с нужным горизонтом событий r = 2 и светопо-

добной геодезической r = 3 - t. На диаграмме она показана штриховой линией.



t	r = 3 - t	$r_2 = 2+2^{-3+(3-t)}$
-5	8	34
-4	7	18
-3	6	10
-2	5	6
-1	4	4
0	3	3
1	2	2,5
2	1	2,25
3	0	2,125
4	-1	2,0625
5	-2	2,03125
6	-3	2,015625
7	-4	2,0078125
8	-5	2,00390625

Рис.2 Диаграмма Пенроуза для вечной Черной дыры

Справа на рисунке приведена таблица перевода обычных координат геодезической в координаты с горизонтом r = 2 для произвольной функции r = 3 - t. Хорошо видно соответствие исходной шкалы и шкалы, сжатой до горизонта r = 2. Можно считать, что для интервала r < 4 геодезическая построена по данным из первой и третьей колонок, а для интервала r >= 4 из первой и второй колонок. Таблица составлена для эмпирического уравнения преобразования координат $r_2 = 2 + 2^{-3+(3-t)}$

На самом деле, геодезическая целиком построена по данным из первых двух колонок, по шкале, влево негласно имеющей прежние обозначения 4, 3, 2, 1, 0, -1 и так далее. В обоих случаях (двух разных шкал) считается, что текущее время, его изменение соответствует неподвижному наблюдателю. Но координата r соответствует его наблюдениям по обозначениям сжатой шкалы 4, 3, 2.5, 2.125 и так далее. Это означает, что никакая геодезическая не сможет достичь горизонта. При возрастании времени до бесконечности, конечная точка всегда будет меньше 2.

Итак, шкала диаграммы в диапазоне от 2 до 3 сжата в соответствии со степенной функцией 2^{-n} и координаты на

ней хорошо аппроксимируются функцией $r_2 = 2 + 2^{-3+(3-t)}$, подобранной для конкретной геодезической $r = 3 – t$. Поэтому на экран можно выводить информацию для радиуса r геодезической из колонки 3. Но время t из колонки 1 мы использовать не можем, так как значения функции, радиусы r будут некорректными, не соответствующими этим моментам времени. Например, в рассмотренном случае $r(1) = 2.5 \neq 3 - (1) = 2$. Следовательно, время тоже необходимо пересчитать, то есть: $2,5 = 3 - t$, откуда, $t = 0,5$. Физически такое преобразование можно трактовать как замедление времени. Это значит, что для внешнего наблюдателя по мере приближения события к горизонту сокращается не только расстояние, но и темп хода часов в собственной системе отсчета события.

Преобразования координат должны производиться уже после достижения $r \leq 4$. Очевидно, что на интервале $3 < r < 4$, график функции нелинейный по сравнению со шкалой диаграммы с левым *бесконечным* горизонтом, поэтому на этом интервале тоже необходимы преобразования. Чтобы различать эти два типа диаграмм – с бесконечным горизонтом слева и с горизонтом 2М, будем последние называть 2М-диаграммами Пенроуза.

В конечном счете, формально, в словесной форме алгоритм преобразований можно представить так:

Если $r(t) \leq 3$ то

Преобразовать и вычислить новые значения r и t по уравнениям:

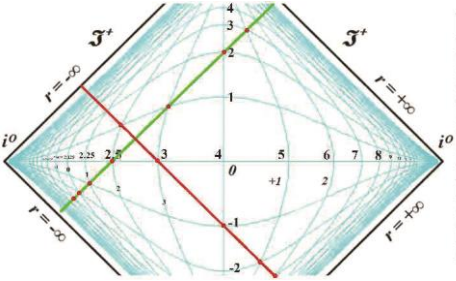
$r_{new} = 2+2^{-3+r(t)}$

$t_{new} = f(r_{new})$

где $f(r_{new})$ – обратная функция для $r(t)$

Однако эти эмпирические уравнения имеют подозрительную константу в показателе степени – минус 3. Она в точности равна свободному члену в рассмотренном

уравнении геодезической, что должно насторожить. Поэтому для уточнения рассмотрим ещё одно произвольное уравнение геодезической: r = 2.5 + t. Она изображена на диаграмме рис.3 зеленой линией. В правой дополнительной таблице зеленым фоном отмечены отброшенные данные. И мы обнаруживаем несоответствие. Похоже, что в уравнении что-то не учтено.

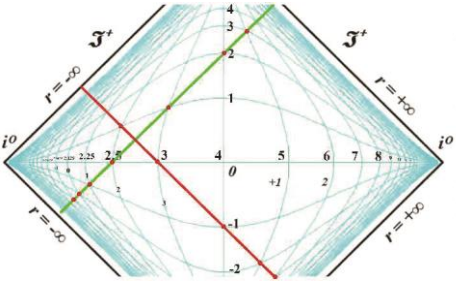


t	r = 3 - t	$r_2 = 2+2^{-3+(3-t)}$
-5	8	34
-4	7	18
-3	6	10
-2	5	6
-1	4	4
0	3	3
1	2	2,5
2	1	2,25
3	0	2,125
4	-1	2,0625
5	-2	2,03125
6	-3	2,015625
7	-4	2,0078125
8	-5	2,00390625

t	r = 2,5 + t	$r_2 = 2+2^{3+(2,5+t)}$
-3	-0,5	2,088
-2	0,5	2,177
-1	1,5	2,354
0	2,5	2,707
1	3,5	3,414
2	4,5	4,828
3	5,5	7,657
4	6,5	13,314

Рис.3. Отклонения в функции преобразования для диаграммы Пенроуза

В правой таблице на рисунке видно, что нулевому значению времени, согласно используемому преобразованию, соответствует координата 2,707, хотя очевидно, что координата должна быть равна 2,5.



t	r = 3 - t	$r_2 = 2+2^{-3+(3-t)}$
-5	8	34
-4	7	18
-3	6	10
-2	5	6
-1	4	4
0	3	3
1	2	2,5
2	1	2,25
3	0	2,125
4	-1	2,0625
5	-2	2,03125
6	-3	2,015625
7	-4	2,0078125
8	-5	2,00390625

t	r = 2,5 + t	$r_2 = 2+2^{3,5+(2,5+t)}$
-3	-0,5	2,063
-2	0,5	2,125
-1	1,5	2,250
0	2,5	2,500
1	3,5	3,000
2	4,5	4,000

Рис.4. Таблица подбора функции преобразования для диаграммы Пенроуза

Пробуем исправить явно удачное уравнение преобразования эмпирически, наугад, просто подбирая показа-

тель степени, добиваясь, чтобы в точке $t = 0$ уравнение давало значение свободного члена. После нескольких попыток это удалось, и функция преобразования дала правильный результат, что видно на рис.4. Подбор оказался успешным, значение функции в нулевой точке 2,5 равно свободному члену. При этом исчезло подозрительное равенство константы в показателе степени и свободного члена уравнения. Построив по такому же алгоритму подбора, угадывания еще несколько таблиц, мы обнаруживаем закономерность в уравнениях преобразования. Уточним, что далее через r_2 обозначено значение r, преобразованное для диаграммы с горизонтом событий $r = 2$.

Итак, создаем несколько разных геодезических с уравнениями $r = n - t$ и подбираем такое значение константы в показателе степени, чтобы значение функции в нуле соответствовало значению свободного члена уравнения $r_2 = n - t\ (t = 0) = n$. Рассматривая сформированные при подборе уравнения, обнаруживаем, что отрицательное слагаемое в показателе степени увеличивается на 1 по модулю:

$$r_2 = 2+2^{-3+(3+t)}$$
$$r_2 = 2+2^{-3,5+(2,5+t)}$$
$$r_2 = 2+2^{-4,25+(2,25+t)}$$
$$r_2 = 2+2^{-5,125+(2,125+t)}$$
$$r_2 = 2+2^{-6,0625+(2,0625+t)}$$

Замечаем, что это увеличение целочисленное, причём, в конечном счете, в показателе степени свободный член уравнения просто исчезает, а остается только эта отрицательная прибавка:

$$r_2 = 2+2^{-3+(3+t)} = 2+2^{-0-3+(3+t)} = 2+2^{-0+t}$$
$$r_2 = 2+2^{-3,5+(2,5+t)} = 2+2^{-1-2,5+(2,5+t)} = 2+2^{-1+t}$$
$$r_2 = 2+2^{-4,25+(2,25+t)} = 2+2^{-2-2,25+(2,25+t)} = 2+2^{-2+t}$$
$$r_2 = 2+2^{-5,125+(2,125+t)} = 2+2^{-3-2,125+(2,125+t)} = 2+2^{-5+t}$$

$r_2 = 2+2^{-6,0625+(2,0625+t)} = 2+2^{-4-2,0625+(2,0625+t)} = 2+2^{-4+t}$

Следовательно, для уравнения светоподобной геодезической вида $r_2 = a + t$ можно записать обобщенно в виде $r_2 = 2+2^{n+t}$, где n = 0, -1, -2, -3, -4 и так далее означают номер линии r = const влево он нуля (r = 3М).

Замечаем, что прибавка в точности равна показателю степени двойки для дробной части свободного члена. То есть, нужно от свободного члена отнять целую часть, равную 2 для всех уравнений, и записать дробную часть как степень числа 2. Для рассмотренных уравнений показатели степени будут целыми отрицательными порядковыми числами от 0 до -4. Чтобы преобразовать этот показатель в искомую величину, иначе, найти по известному r_2 соответствующий её номер линии на шкале, логарифмируем, в результате чего получаем произведение нашей "прибавки" на логарифм основания – 2. Следовательно, окончательно получаем выражение:

$$n = \frac{\ln(a-2)}{\ln 2}$$

Другими словами, для геодезической вида r = a – t уравнения преобразования имеют вид $r_2 = 2 + 2^{n+t}$, где n определяется из полученного уравнения. Убедимся в этом:

r = 2,125 + t

$n = \ln(2,125–2)/\ln2 = \ln(0,125)/\ln2 = \ln(2^{-3})/\ln2 = -3\ln2/\ln2 = -3$

Уравнение в рассмотренном выше формате будет иметь вид:

$$r_2 = 2+2^{-3+t}$$

Как видим, результат в точности совпал с результатом проведенных выше рассуждений. Поэтому уравнения в алгоритме преобразования координат запишем в виде

$r_{new} = 2+2^{\ln(a-2)/\ln2+t}$

$t_{new} = f(r_{new})$

Считаем очевидным, и это нисколько не противоречит полученным соотношениям, что значение свободного члена может быть любым, а не только с рассмотренной специфической дробной частью, поскольку эти уравнения на интервале $a > 2$ являются гладкими, непрерывными функциями без экстремумов. Если это предположение неверно, то между "правильными точками" с рассмотренными специфическими дробными частями на графике неизбежно появятся изгибы.

Наши выкладки проведены для уравнений геодезических вида $r = a \pm t$. Но фактически полученные преобразования относятся к конкретным точкам в пространстве, независимо от времени их возникновения. То есть, свободный член на самом деле является полноправной пространственной координатой, и величина времени для него не важна. Другими словами, мы можем вычислить произвольную координату как значение функции $r(t_n)$, но поместить её, например, в нулевую точку времени:

$$r_{new} = 2+2^{\ln(r(tn)\ -2)/\ln 2+0} = 2+2^{\ln(r(tn)\ -2)/\ln 2}$$

$$t=0$$

Понятно, что теперь эта координата однозначно определена как $r_{new} = const$ и ничто не препятствует тому, чтобы поместить её вообще в любую точку времени, в том числе и в точку времени, для которого она изначально и была вычислена $r_{new}(t)$. Это означает, что уравнения преобразования можно корректно переписать в виде:

$$r_{new} = 2+2^{\ln(r(t)-2)/\ln 2}$$

$$t_{new} = f(r_{new})$$

В общем случае уравнение геодезической некоторого события в системе отсчета неподвижного наблюдателя может давать при вычислениях значения координат t и r в пределах бесконечностей. Но в системе координат с горизонтом событий $r = 2M$ вычисленная координата r сжима-

ется таким образом, что её предельное значение снизу, в сторону убывания становится не меньше 2. Каждому преобразованному значению координаты r соответствует время, определяемое из уравнения геодезической. Очевидно, что это время тоже будет стремиться к какому-то пределу сверху. Поскольку время у неподвижного наблюдателя может возрастать до бесконечности, то такое ограничение времени для неподвижного наблюдателя физически выглядит как замедление темпа хода часов вплоть до их остановки в системе отсчета этого события.

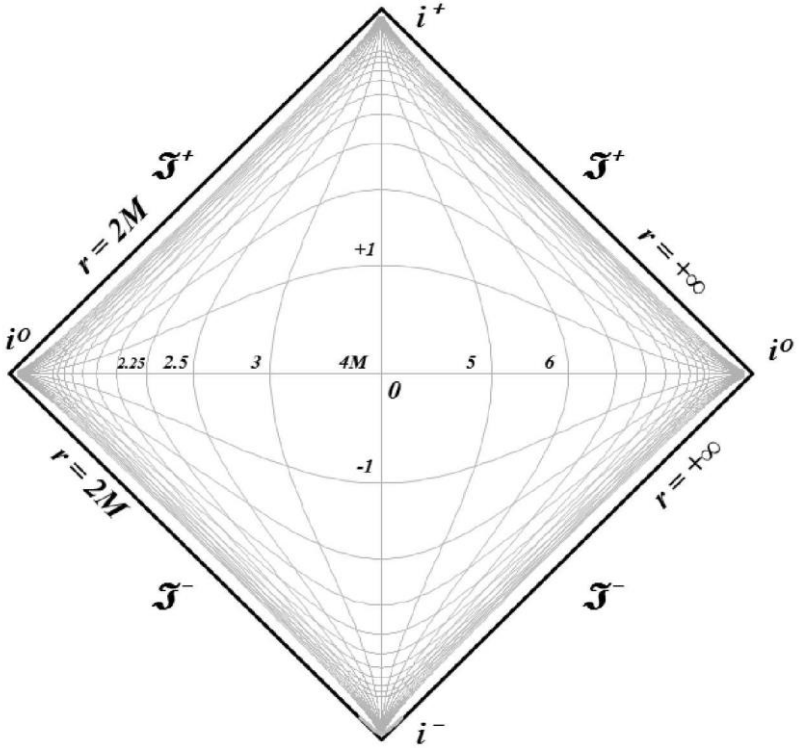


Рис.5. Исходная диаграмма Пенроуза с левым горизонтом событий r = 2M

Это явление описано в литературе, а на киноэкранах показано в виде сюжета с падающим на Черную дыру аст-

ронавтом. Постепенно падение замедляется, астронавт замирает, что и означает замедление и полную остановку его собственных часов, которая происходит на предельно близких расстояниях от горизонта событий Черной дыры r = 2M. В наших выкладках двойка взята именно из этого соотношения. Шкала расстояний и времени на 2M-диаграмме Пенроуза составлена из допущения M = 1 и может иметь такой вид, показанный на рисунке рис.5.

Теперь, используя координатную сетку диаграммы и уравнения преобразования координат, мы можем аналитически строить любые геодезические в пространстве, содержащем Черную дыру. Однако следует отметить, что сетка времени и расстояний должна соответствовать системе отсчета неподвижного наблюдателя. Для правой части после линии r = 3M это верно как для дистанций, так и для времени. Эта сетка условно равномерная, то есть все деления обозначает одинаковые интервалы. Но в левой части диаграммы, до линии r = 3M шкала расстояний имеет обратное сжатие, то есть, значения интервалов при смещении влево уменьшаются по степенному закону. Это вызвало, как отмечено выше, необходимость ввести новое время, время движущегося наблюдателя. Такое дополнение приводит к противоречивым и негативным последствиям. Рассмотрим их на примере динамической 2M-диаграммы Пенроуза для коллапса нейтронной звезды.

Нелинейность времени на диаграмме Пенроуза

В качестве примера изобразим на полученной диаграмме коллапс нейтронной звезды с образованием Черной дыры, рисунок рис.6. На рисунке показана мировая линия нейтронной звезды (красная) и мировая линия (синяя) наблюдателя, вращающегося вокруг коллапсирующей звезды на неизменном расстоянии 6M от её геометриче-

ского центра. Мировая линия звезды составлена на основе довольно условной истории. Предполагаем, что некая давно образовавшаяся нейтронная звезда имела неизменный радиус 3M. В момент времени t = - 4 звезда начала поглощать внешнее вещество – газ, кометы, космический мусор.

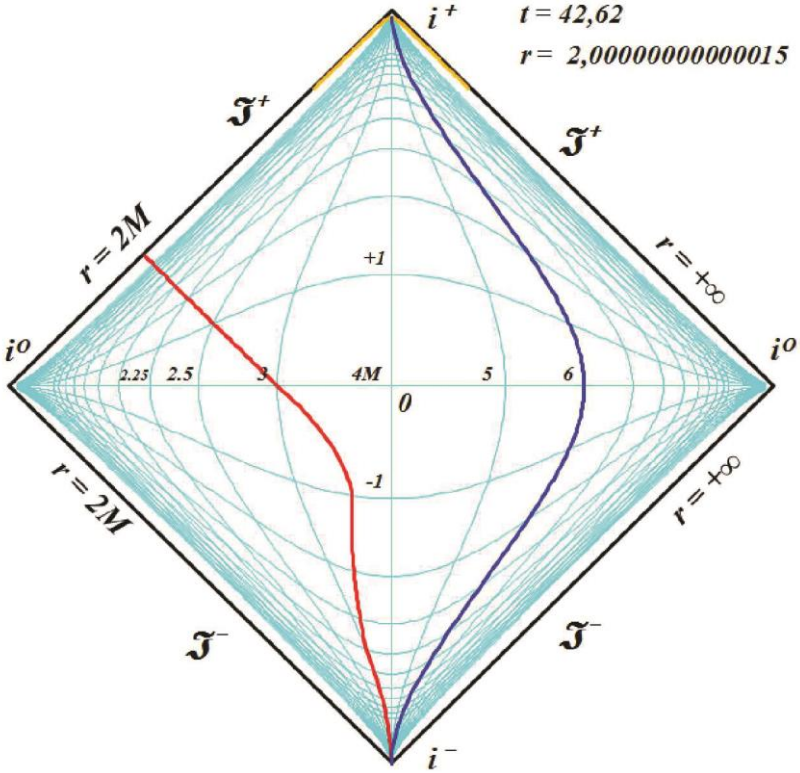


Рис.6. Диаграмма Пенроуза для коллапса нейтронной звезды в Черную дыру (анимация [81])

До момента времени t = - 1 масса звезды непрерывно увеличивалась, и, соответственно, увеличивался её радиус до примерно r = 3,5M. В этот момент масса звезды превысила критическую, и звезда начала стремительно сжиматься. При этом скорость падения в центр быстро достигла скорости света, что показывает светоподобный участок

геодезической после момента времени t = 0. Дальнейший процесс коллапса показывает, что, сколько бы времени наблюдатель ни смотрел на звезду, он никогда не увидит её радиуса меньше 2. Это заметно из уравнения на диаграмме справа вверху.

Можно сказать, что диаграмма достаточно наглядно демонстрирует процесс коллапса нейтронной звезды. Однако, заметны её некоторые графические отличия от распространенных в литературе изображений этого процесса. Речь даже не о том, что на диаграмме не изображена сингулярность. На некоторых диаграммах нижняя часть показана некорректно. Область пространства, которую она отображает, искажает положение нижней точки i^-.

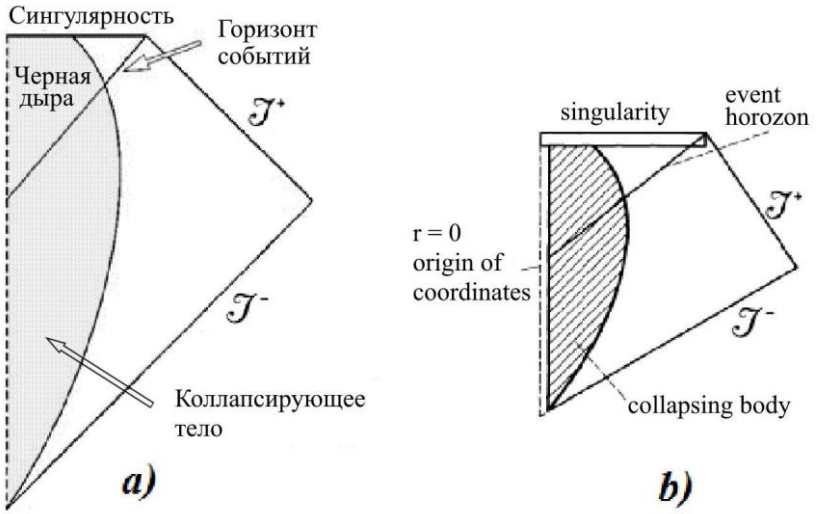


Рис.7. Две версии диаграммы Картера-Пенроуза для звезды, коллапсирующей в черную дыру a) [67, Рис.3.3], b) [66, fig.3]

Внимательное рассмотрение рисунков рис.6 и рис.7 приводит к неожиданному выводу. Для "вечной черной дыры" или коллапсирующей нейтронной звезды невоз-

можно создать диаграмму Пенроуза с равномерной сеткой расстояний и времени. Вероятно, поэтому на подобных диаграммах никогда не указываются точные числовые значения линий t = const и r = const. Они попросту не могут быть константами. При таком константном назначении сетки 2M-диаграммы светоподобные мировые изобразить прямыми линиями будет *невозможно*. Вновь обратимся к рисунку рис.4 и рассмотрим светоподобную мировую линию, штриховую линию

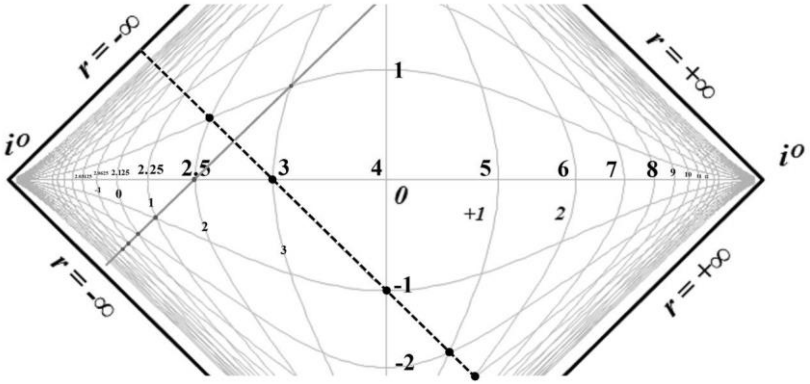


Рис.8. Светоподобные геодезические на 2M-диаграмме Пенроуза, с горизонтом 2M

Эта геодезическая изображена прямой линией с указанием на словах, что время на ней соответствует часам "падающего" на Черную дыру наблюдателя. Но на самой диаграмме это не отображено, и на рисунке линии t = const выглядят как имеющие одно и то же значение на всем своём протяжении. Но, если исходить из этих фактических значений времени, а не из воображаемых показаний часов наблюдателя (словесных указаний), движущегося к Черной дыре, то светоподобные геодезические окажутся искривленными. Нужно просто построить эту геодезическую по точкам, по координатной сетке диаграммы. Рассмотренная штриховая геодезическая должна изгибаться влево вниз,

если строить её по показаниям часов неподвижного наблюдателя, как показано на рисунке рис.9.

В самом деле, если бы сетка слева r = 3M соответствовала тем же t = const справа от r = 3M, то с их использованием красная светоподобная геодезическая r = 2.5+t должна быть продолжена по зеленому пути. И, наоборот, если бы сетка справа от r = 3M соответствовала тем же t = const слева от r = 3M, то с их использованием красная светоподобная геодезическая r = 2.5+t должна проходить по синей траектории, и только с учетом нелинейности шкалы времени. Понятно, что даже при одновременном использовании разных значения t = const для одной и той же линии времени справа и слева от линии r = 4M эти два пути не могут совпасть, возникнет изгиб, излом, скачок в точке на удалении от Черной дыры, равном r = 2.5M.

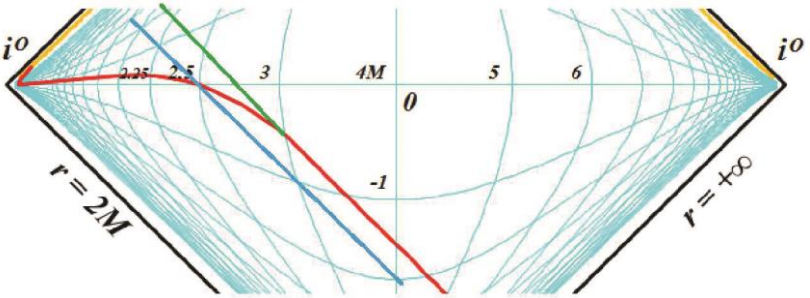


Рис.9. Светоподобные геодезические на диаграмме Пенроуза с горизонтом 2M

Конечно, можно для светоподобных геодезических схитрить и молча строить их по очевидной синей траектории, поскольку она явным образом проходит через точку r = 2.5+t(=0). Но достаточно взглянуть на смежную, рядом расположенную область вдоль геодезической, как сразу будет видно, что в ней это уравнение светоподобной геодезической нарушается. Можно предположить, что эта криволинейность присуща лишь рассмотренному варианту

"сжатия" шкалы расстояний, на созданной специфической 2M-диаграмме. Однако, рассуждая логически, можно прийти к выводу, что это неустранимая особенность, присущая вообще любой возможной переменной координатной сетки, для которой хотя бы одна из осей имеет сетку линий постоянных значений $r = \text{const}$ или $t = \text{const}$. Иначе эту особенность можно сформулировать следующим образом. На диаграмме Пенроуза с конечной величиной одного из горизонтов (2M-диаграмме) *невозможно* изобразить светоподобную геодезическую в виде прямой линии. Изображение на таких диаграммах световых конусов и прямолинейных нулевых геодезических становится недопустимым, некорректным.

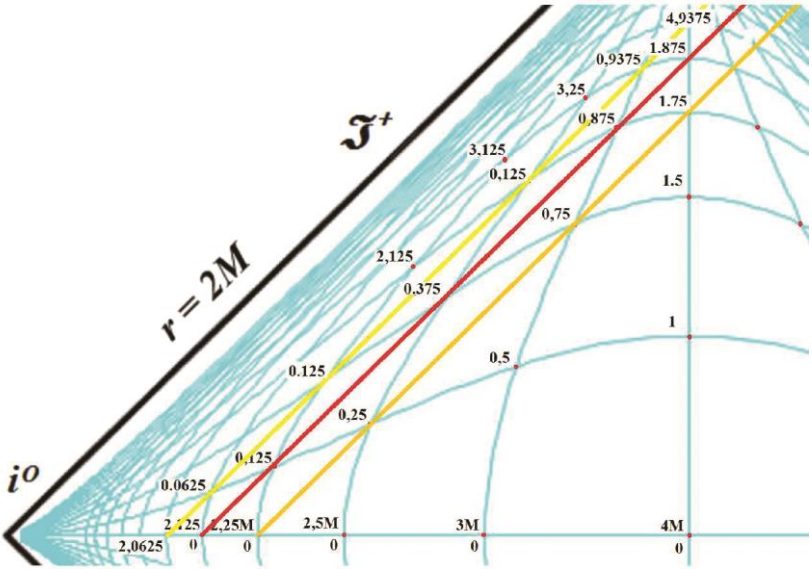


Рис.9а. Неравномерная шкала расстояний требует неравномерной шкалы времени

Конформность отображения автоматически нарушается. Это становится очевидным, если рассмотреть рядом находящиеся "квадраты" координатной сетки такой

диаграммы. Если по одной координате метки интервалов равны, то вторые стороны этих "квадратов" имеют различающиеся значения. Иначе говоря, для каждой (красной) точки линии времени мы должны указывать два разных значения – одно справа, другое слева – рисунок рис.9а.

Как видим, для обеспечения прямолинейности нулевых геодезических на линии t по всей их длине нужно наносить индивидуальные показания. На рисунке показано, что справа от оси r = 4M линии времени по всей длине имеют значения t = const = 1, 2, 3, 4 так далее. Но слева на этих же линиях значения времени плавно убывают. Например, одна из линий на всём протяжении вправо от t = 4M имеет значение t = const = 2, а влево она имеет убывающие значения t = 1.5, 1.25, 1.125 и так далее. Только с такими значениями времени светоподобная геодезическая будет выглядеть прямой линией с наклоном в 45 градусов.

Каким же может быть выход из этой ситуации в "королевстве кривых лекал"? Существует несколько возможностей, не решающих проблему полностью, поскольку такое решение вообще невозможно. Самый рациональный – это отказаться от полноразмерных прямолинейных светоподобных геодезических. В этом случае, сетка диаграммы будет полностью соответствовать всем построениям. В сущности, это и означает построение всех, в том числе, и нулевых геодезических в этой сетке. В этом случае все линии времени постоянны t = const. Но светоподобные геодезические будут изображаться кривыми линиями. Эта возможность и рассмотрена выше.

Еще более радикальный способ – это устранение границы излома шкалы r в точке r = 3M. То есть, вся шкала от 2M до плюс бесконечности должна описываться без условных операторов, одной монотонной функцией. В

данном случае это функция 2^n. При использовании зависимости $r_n = (2^n + 2)$, шкала r будет иметь такую разметку:

$$\left(2+\frac{1}{2^n}\right)+\ldots+2\frac{1}{64}+2\frac{1}{32}+2\frac{1}{16}+2\frac{1}{8}+2\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}+$$
$$+3+4+6+10+18+\ldots+\left(2^n+2\right)$$

Граничные математические значения параметра n – от минус до плюс бесконечности, а r, соответственно, изменяется он 2M до плюс бесконечности. Реальные значения зависят от технических параметров используемой вычислительной системы. В качестве нулевой точки может быть выбрано любое из значений ряда, поскольку наилучшее значение – нулевое – в этом ряду отсутствует. Можно предложить обоснованное и использованное выше значение r = 4M. В этом случае слева будет, по меньшей мере, одно целочисленное значение r = 3M. В теории Черных дыр, кстати, оно рассматривается как специфическое.

При такой разметке оси r и разметке t = const масштабная сетка не позволяет строить светоподобные геодезические в виде прямых линий. Однако, как показано на рис.9, позволить прямолинейные светоподобные геодезические может использование нелинейной шкалы времени. Анализ множества диаграмм, подобных изображенной на этом рисунке, позволил эмпирически обнаружить аналитическую зависимость времени от разметки сетки, позволяющую получить прямолинейные геодезические.

Значения времени на каждой линии, ранее обозначаемых как t = const, определяется выражением:

$$t = 2^n\left(1-\frac{1}{2^m}\right) \qquad (1)$$

где

n – номер линии r; n = 0 для r = 3M

m – номер линии t; m = 0 для оси r

Например, линия r = 10 имеет порядковый номер 3 от точки r = 3M. Если линия времени имеет номер 2, то есть, вторая линия вверх, считая он горизонтальной оси, то этой точке на диаграмме будет соответствовать время:

$$t = 2^3\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 6$$

Сетка диаграммы сильно нелинейная, что можно увидеть из таблицы:

Таблица значений времени в точках m,n

m	Номер метки n (0 соответствует r=3M)				
	-5	-4	-3	-2	-1
-5	-0,96875	-1,9375	-3,875	-7,75	-15,5
-4	-0,46875	-0,9375	-1,875	-3,75	-7,5
-3	-0,21875	-0,4375	-0,875	-1,75	-3,5
-2	-0,09375	-0,1875	-0,375	-0,75	-1,5
-1	-0,03125	-0,0625	-0,125	-0,25	-0,5
0	0	0	0	0	0
1	0,015625	0,03125	0,0625	0,125	0,25
2	0,0234375	0,046875	0,09375	0,1875	0,375
3	0,0273438	0,0546875	0,109375	0,21875	0,4375
4	0,0292969	0,0585938	0,1171875	0,234375	0,46875
5	0,0302734	0,0605469	0,1210938	0,2421875	0,484375

m	Номер метки n (0 соответствует r=3M)					
	0	1	2	3	4	5
-5	-31	-62	-124	-248	-496	-992
-4	-15	-30	-60	-120	-240	-480
-3	-7	-14	-28	-56	-112	-224
-2	-3	-6	-12	-24	-48	-96
-1	-1	-2	-4	-8	-16	-32
0	0	0	0	0	0	0
1	0,5	1	2	4	8	16
2	0,75	1,5	3	6	12	24
3	0,875	1,75	3,5	7	14	28
4	0,9375	1,875	3,75	7,5	15	30
5	0,96875	1,9375	3,875	7,75	15,5	31

Таблица соответствует движению слева направо, то есть в бесконечное будущее. Если скорость отрицательная, то есть движение из бесконечности к горизонту событий, справа налево, то знак у параметра m нужно изменить на противоположный.

Для демонстрации используем это уравнение при определении координат точек некоторой кривой r = at + b:

$$t = 2^n\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

$$r = at + b$$

Находим значение параметра n (номера линии r на диаграмме) для этого значения функции:

$$t_n = 2^n\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

$$n = \log_2(r-2) = \log_2(at_n + b - 2)$$

Подставляем в уравнение для t_n:

$$t_n = 2^{\log_2(at_n+b-2)}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

Преобразуем степень логарифма, совпадающую с основанием логарифма:

$$t_n = 2^{\log_2(at+b-2)}\left(1-\frac{1}{2^m}\right) = (at_n + b - 2)\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

Раскрываем скобки (теперь индекс у t можно отбросить):

$$t = at\left(1-\frac{1}{2^m}\right) + (b-2)\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

Переносим все величины с t влево:

$$t - at\left(1-\frac{1}{2^m}\right) = (b-2)\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

Находим значение t:

$$t = \frac{(b-2)\left(1-\frac{1}{2^m}\right)}{1-a\left(1-\frac{1}{2^m}\right)} \qquad (2)$$

Этому значению t соответствует значение r:

$$r = at + b = a\frac{(b-2)\left(1-\frac{1}{2^m}\right)}{1-a\left(1-\frac{1}{2^m}\right)} + b \qquad (3)$$

И значение n:

$$n = \log_2(at + b - 2) \qquad (4)$$

Итак, для нанесения точки на 2М-диаграмму у нас есть исходные данные m, n и r(m). Значение m является параметром и обозначает текущую линию на диаграмме как некоторое псевдо-время, псевдо-настоящее. Значение реального времени в этой точке, значение самой функции в этой точке и номер линии n на шкале r находим из полученных уравнений (2), (3) и (4).

Проверим уравнения для некоторых значений функции r = t + 4. Это уравнение светоподобной геодезической, идущей в бесконечность через центр (r = 4M) координат диаграммы, в котором a = 1, b = 4. Находим первую точку для $m_0 = 0$, то есть на оси r:

$$n_0 = \log_2\left(1\times\frac{(4-2)\left(1-\frac{1}{2^0}\right)}{1-a\left(1-\frac{1}{2^0}\right)} + 4 - 2\right) =$$

$$= \log_2\left(1\times\frac{2(1-1)}{1-1\times(1-1)} + 2\right) = \log_2 2 = 1$$

Значение функции для этой точки:

$$r_0 = t_0 + 4 = \frac{(4-2)\left(1-\frac{1}{2^0}\right)}{1-\left(1-\frac{1}{2^0}\right)} + 4 = \frac{2(1-1)}{1-(1-1)} + 4 = 4$$

Получен корректный результат $n_0 = 1$ (первая точка после 3М, то есть 4М), $m_0 = 0$, $r_0 = 4$, $t_0 = 0$. Найдем сле-

дующую точку $m_1 = 1$. Поскольку это светоподобная геодезическая, мы ожидаем результат $n_1 = 2$, $r_1 = 6M$. Подставляем параметры в уравнение и получаем $n_1 = 2$; $r_1 = 6$. Полученный результат соответствует ожиданиям. Для большей уверенности найдем ещё одну группу значений – $m_2 = 2$, $n_2 = 3$, $r_2 = 10M$, что соответствует следующей линии сетки расстояний. После подстановки в уравнения получены значения $t_2 = 6$, $r_2 = 10$, $n_2 = 3$. И вновь мы получили ожидаемые значения параметров, соответствующих на диаграмме прямой линии – светоподобной геодезической, проходящей через начало координат. Следовательно, можно считать уравнения корректными для линейных функций. Эту последовательность уравнений можно обобщенно записать:

$$t = 2^n\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)$$

$$t = \frac{(b-2)\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)}{1 - a\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)}$$

$$r = at + b$$

$$n = \log_2(r-2)$$

Эта система уравнений соответствует мировым линиям с положительной скоростью, то есть, $a > 0$. Несложно убедиться, что для $a < 0$ эти уравнения дают неверные результаты. Многочисленные вычисления и графические построения привели к выводу, что для отрицательной скорости необходимо изменить знак параметра m:

$$t = \frac{(b-2)\left(1 - \frac{1}{2^{-m}}\right)}{1 - a\left(1 - \frac{1}{2^{-m}}\right)}$$

$$r = at + b$$
$$n = \log_2(r - 2)$$

Для большей определенности опишем алгоритм вычислений на словах. Сначала определяем номер и знак m линии t на диаграмме, на которой будем определять точку n некоторой функции r = at + b. После этого вычисляем значение времени, соответствующее функции, значение функции r и номер линии n, соответствующие этому времени. Следует отметить, что на такой 2М-диаграмме линии t = const явочным порядком заменены на линии m = const. Эта замена позволила сохранить конформный вид светоподобных геодезических, то есть, угол их наклона к горизотнали в 45 градусов.

Построение мировой линии произвольной функции

Полученные уравнения сформированы для уравнений прямолинейных геодезических вида r = at + b. Вместе с тем, базовое уравнение (1) можно использовать и для уравнений произвольных функций и одиночных точек на диаграмме. Пусть задана функция в общем виде r(t). Тогда для любого её значения мы можем вычислить номер соответствующей метки на шкале r:

$$n = \log_2(r(t) - 2)$$

где

n – номер координаты для величины r(t);

r(t) – значение произвольной функции;

Для построения уравнения, мы выбираем какую-либо линию m, на которой ищем точку, соответствующую вычисленному значению функции r(t) и номеру n координаты этого значения. Сначала находим время, соответствующее вычисленному значению функции и m:

$$t_m = 2^n\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

Значения $r(t_m)$, n и m однозначно связаны, поэтому:

$$t_m = 2^{\log_2(r(t_m)-2)}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

Преобразуем степень логарифма, совпадающую с основанием логарифма:

$$t_m = (r(t_m)-2)\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

Мы считаем, что вычислили значение функции r(t) именно в этой точке, в которой время и есть t, которое мы обозначили теперь уже как t_m. Следовательно, последнее уравнение в этом случае справедливо. Выделим из него это время t_m:

$$t_m = (r(t_m)-2)\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

$$t_m = r(t_m)\left(1-\frac{1}{2^m}\right)-2\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

$$t_m - r(t_m)\left(1-\frac{1}{2^m}\right)+2\left(1-\frac{1}{2^m}\right)=0 \quad (5)$$

Дальнейшие преобразования в общем виде невозможны. Нужно ввести конкретное значение функции r(t) и только после этого вычислить время. Но, нам нужно определиться со знаком параметра m. Очевидно, что направление движения линии, скорость её движения – это производная:

$$v = r'(t_m)$$

Следовательно, нужно вычислить производную в данной точке и взять её знак в качестве знака параметра. Рассмотрим частные случаи. Ожидаем, что эти решения

дадут уже полученные выше результаты. Пусть r(t) = at + b, тогда:

$$t_m - (at_m + b)\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) = 0$$

$$t_m - at_m\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) - b\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) = 0$$

$$t_m(1 - a)\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) = (b - 2)\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)$$

$$t_m = \frac{(b - 2)\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)}{1 - a\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)}$$

Как видим, получен ожидаемый результат, совпадающий с выведенным выше выражением (2).

Уравнения преобразования для точки

Сгруппируем компактно полученные результаты для параметрического построения геодезических, описываемых линейными функциями. Напомним, что линии, которые ранее имели обозначение t = const, теперь имеют новое обозначение m = const. Задаем некоторое, текущее значение параметра m. Вычисляем время t, значение функции, соответствующее этому времени r(t) и номер линии n на шкале расстояний. При условии $a \geq 0$. Если $a < 0$, значение m в уравнения подставляем со знаком минус. Запишем систему из двух уравнений в общем виде:

$$a \geq 0 \quad t_m = \frac{(b - 2)\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)}{1 - a\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)} \quad r(t_m) = at_m + b \quad n = \log_2(at_m + b - 2)$$

$$a < 0 \quad t_m = \frac{(b-2)\left(1-\frac{1}{2^{-m}}\right)}{1-a\left(1-\frac{1}{2^{-m}}\right)} \quad r(t_m) = at_m + b \quad n = \log_2(at_m + b - 2)$$

Несложно догадаться, что из этих уравнений мы можем получить уравнения для построения одиночной точки. Для такой точки параметр a = 0, поэтому:

$$t_m = (b-2)\left(1-\frac{1}{2^m}\right); \quad r(t_m) = b; \quad n = \log_2(b-2)$$

Из исходных уравнений для прямой следует, что каждому значению точки будут соответствовать две координаты r на диаграмме, поскольку значение скорости, параметра a не определено. Поэтому не определен и знак параметра m.

Использование диаграммы "Вечной Черной дыры"

Выведем уравнение для гипотетической ситуации подлета и удаления от Черной дыры. Видимо, возможным уравнением движения такого космолета может быть квадратичная функция вида $r = at^2 + v_0t + r_0$. Это простейшее уравнение, описывающее ускоренное движение в некотором направлении с изменением движения в обратную сторону. Для определения конкретных значений параметров уравнения нужно задать три точки: исходную, конечную и точку вблизи горизонта Черной дыры. При этом желательно ограничить скорость движения скоростью света. Это правильный подход. Однако мы вновь поступим эмпирически, просто взяв почти наугад уравнение. Один параметр в нём нам уже известен – это свободный член уравнения. Выбираем симметричное уравнение, поэтому в нулевой момент времени оно будет иметь минимум и этот минимум – расстояние до горизонта. Два других параметра, хотя и взяты наугад, но очевидно, что первый член, a – это ускорение,

оно должно быть положительным, поскольку космолет должен удаляться от Черной дыры, а второй – начальная скорость, видимо, должен быть отрицательным. Итак, выбираем следующее уравнение:

$$r = 0{,}5t^2 - 2t + 2{,}25$$

Проверив уравнение на максимальную скорость:

$$v = r' = t - 2,$$

обнаруживаем, что лишь на отдельных участках скорость не превышает скорости света $v < c = 1$. Однако оставим всё как есть, поскольку для нас сейчас важнее визуализация, чем соответствие физическим ограничениям. Пусть наш космолет умеет двигаться со сверхсветовой скоростью. Описанную ситуацию мы анимируем на разработанных выше динамических 2M-диаграммах Пенроуза. Вот что в результате вышло:

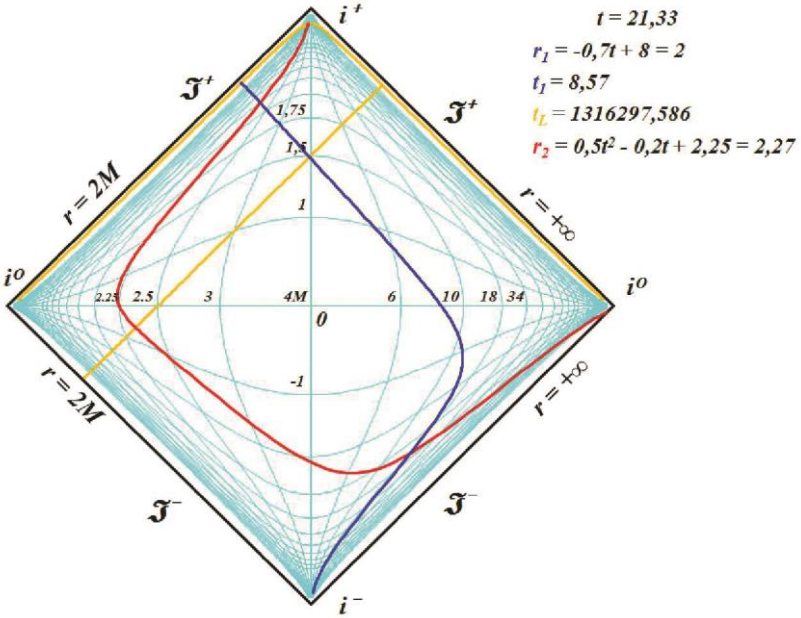


Рис.10. Мировые линии космолетов, движущихся к Черной дыре (анимация [81])

На рисунке (анимации) изображены три мировые линии. Красным цветом выделена мировая линия придуманного нами космолета. Из глубин космоса он движется в направлении Черной дыры. Он встречает на своем пути другого путешественника, мировая линия которого изображена синим цветом. Встреча произошла на расстоянии чуть меньше 34 от геометрического центра Черной дыры:

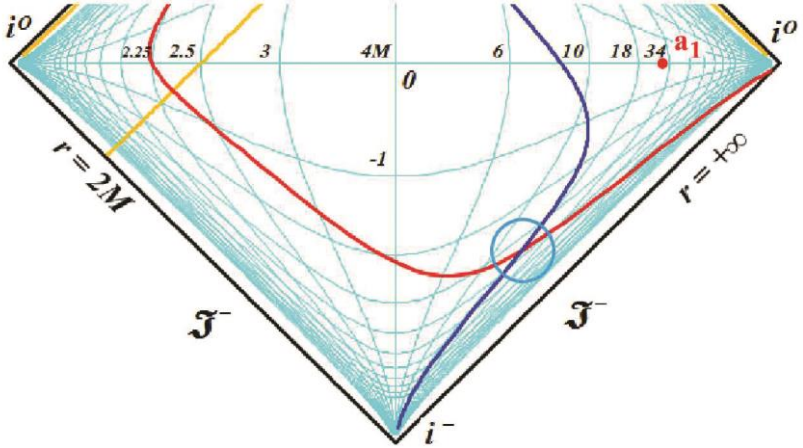


Рис.11. Встреча двух космолетов на пути к Черной дыре – отмечена кружком и красной точкой на оси расстояний на дистанции, чуть меньше

Расстояние определено приблизительно, проведением линии r = const от точки встречи до оси расстояний. Далее наш космолет опередил второго участника и со сверхсветовой скоростью продолжил движение к Черной дыре. Скорость по мировой линии определяется её наклоном: он меньше 45 градусов. Почти вблизи от конечной точки путешествия, космолет ловит вспышку света, испущенную с самого горизонта Черной дыры, мировая линия которой изображена желто-оранжевым цветом.

После этого сигнала космолет приближается к конечной точке своего маршрута и затем начинает удаляться

от горизонта событий черной дыры. На диаграмме видно, что в момент наибольшего сближения с Черной дырой до расстояния 2,25M, скорость космолета падает до нуля: касательная к его мировой линии – вертикальная линия. В частности, это может означать, что космолет либо движется по орбите вокруг звезды, либо завис над нею под действием своих двигателей.

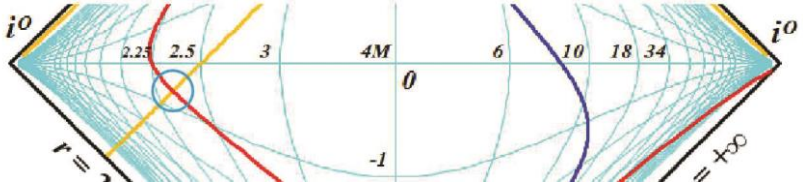


Рис.12. Космолет ловит вспышку света (в синей окружности), испущенную с горизонта Черной дыры. Произошло это на расстоянии, чуть больше 2,25M от центра Черной дыры.

Далее космолет либо крайне медленно начал удаляться от Черной дыры, либо продолжил своё движение по медленно раскручивающейся спиральной орбите. Это видно по тому, что даже через очень большое время, его удаленность от горизонта выросла лишь до 2.27M.

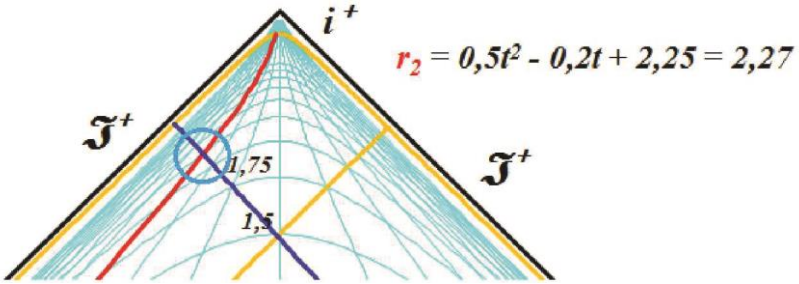


Рис.13. Два космолета вновь встретились на пути к Черной дыре (отмечено синей окружностью). По уравнению можно увидеть, что это произошло на дистанции около 2,27

После встречи, что видно на диаграмме, наш космолет завис над горизонтом Черной дыры, а второй звездолет со скоростью света устремился к горизонту, на сингулярность. Ранее, на расстоянии ровной 4М от центра дыры, он поймал ту же вспышку света, которую до него видел наш космолетчик. На этом, можно сказать, история полета завершена.

Можно отметить, что математическая модель динамической диаграммы Пенроуза позволила произвести построения геодезических по аналитическим выражениям, функциям. Рассмотрим несколько контрольных точек, чтобы выяснить, насколько точно построения обеспечивают соответствие функций координатной сетке диаграммы.

Первое, очевидное – нулевая геодезическая построена строго по правилам диаграмм. Однако внимательный читатель уже, видимо, обратил внимание на загадочные цифры рядом с вертикальной центральной линией диаграммы r = 4М. Эти цифры обозначают время, соответствующее рядом проходящей линии времени сетки:

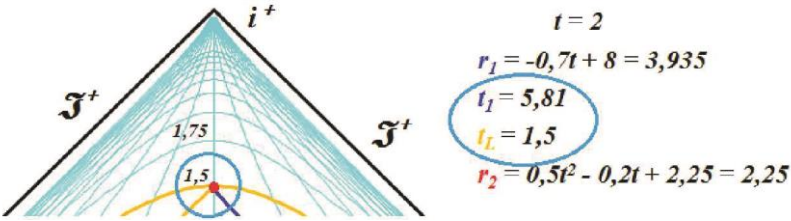


Рис.14. Анизотропия времени на диаграмме Пенроуза. В одной точке пространства два разных значения времени диаграммы

На центральной оси времени возле точки регистрации вспышки вторым космолетом, отмеченной красной точкой в голубой окружности, стоит метка 1,5М. Уравнения, приведенные рядом с диаграммой, выделенные голубым овалом, отображают время на этой же диаграмме, со-

ответствующее времени "настоящего" – оранжевой линии или параметру m. Видим, что показания времени для второго космолета в этой же точке равны t_1 = 5,81M, а время световой геодезической равно t_L = 1,5M. То есть, получается, что линия "настоящего" (параметра m) имеет два различных значения времени для одной и той же точки? Как это возможно?

Это противоречие, парадокс отражает анизотропию времени на диаграммах Пенроуза рассмотренного вида с горизонтом 2M. Выше, при построении сетки диаграммы, мы исходили из важного условия: мировые линии света должны иметь наклон 45 градусов. Поскольку шкала расстояний неравномерная, то для обеспечения такого наклона неизбежно потребовалось использовать подобную же неравномерную сетку линий времени, как показано на рисунке 9 и таблице следом за ним. Как было обнаружено, изменение знаков в таблице привело и к изменению её областей на диаграмме. Оказалось, что большие значения цифр не случайны. Они в точности соответствовали области вблизи бесконечного горизонта. Но в этой области направление движения было в обратном направлении – справа налево.

А это и означает, что в одну и ту же точку на диаграмме можно попасть от начала движения двумя путями – справа или слева. Поэтому полученные разные значения времени для каждой точки диаграммы одинаково верны, если учитывать направление прихода в эти точки. Как ни удивительно, но для корректного отображения мировых линий света необходимо смириться с этой право-левой анизотропией времени.

На рисунке рис.14 верхняя строчка отображает значение параметра m. Все построения на 2M-диаграмме параметрические и зависят от m. Оранжевая линии выглядит

как линия "настоящего", выглядит как время. И это условное время очень сильно напоминает ньютоново абсолютное время. Все остальные времена – производные. Их отличие друг от друга является, по всей видимости, исключительным свойством именно 2М-диаграмм Пенроуза только этого класса – с горизонтом 2М и неравномерными шкалами расстояний и времени. Отнести их к области релятивистских эффектов, видимо, нельзя. Единственной точкой, в которой все значения времени тождественно равны – это ось расстояний, на которой независимо ни от чего любое время равно исходному – параметру m – и равно 0.

Демонстрация: секундомеры на 2М-диаграмме

Как и в случае диаграммы с бесконечными горизонтами, 2М-диаграмма так же является просто координатной системой. Поэтому мы вполне можем рассматривать в качестве координат не время и радиус, а обычные декартовы координаты x-y. И здесь возникает интересный вопрос: а как в этом случае проявится право-левая анизотропия? Ведь каждому значению x должны соответствовать два разных значения y. Для уравнений "прямых" линий всё, вроде бы, по-прежнему – их величина зависит от скорости изменения функции. Но как быть с единичной точкой, об истории которой ничего не известно?

Допустим, нам нужно изобразить два отрезка с одинаковыми координатами концов. Очевидно, что точки отрезка будут изображаться последовательно, а это уже движение, имеющее и направление и скорость. Вот его и можно использовать. Однако, это не обязательно. Если использовать оба значения параметра m, то будут изображены два симметричных, зеркальных объекта. Эти объекты зеркальны относительно оси m = 0, а их диаграммные координаты однозначно определены параметрами m и n.

Таким образом, имея функции преобразования, можно построить любую геометрическую фигуру. Давайте построим "секундомер", такой же, какой был построен ранее на диаграммах с бесконечными горизонтами [71].

Построение "секундомера" можно произвести симметрично как с пересечением двух изображений друг с другом, так без пересечения, когда каждое из изображений будет полностью находиться в одной из областей – выше или ниже оси m = 0. Мы построим только одно полноразмерное изображение каждого из объектов для одного из значений знака m:

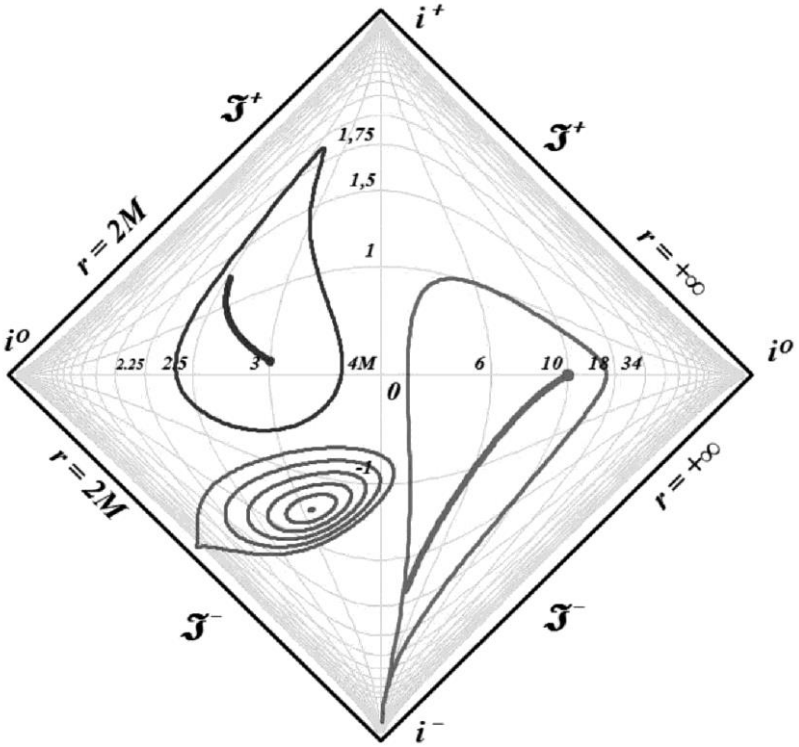


Рис.15. Секундомеры на координатной 2M-диаграмме Пенроуза (анимация [81])

Цветной оригинал этого рисунка приведён здесь на странице стр.95. На рисунке рис.15 изображены три объекта – две окружности, внутри которых вращаются стрелки – указатели, наподобие секундомеров, и группа из концентрических окружностей.

Отметим со всей определенностью, что на рисунке изображены только *окружности* (и пара стрелок – указателей). Левая, каплевидная синяя окружность имеет радиус R = 0,6, а центр её расположен в точке с координатами x = 3, y = 0,1. Длина указателя или радиус окружности, которую описывает его конец, равны 0,53. Параметр преобразования m имеет положительный знак.

Обратим внимание, что диаграмма явно "чувствует" знак параметра, поскольку в данном случае указатель секундомера движется в правильном направлении, по часовой стрелке. Однако, если мы принудительно поменяем знак параметра, то картинка просто перевернётся, зеркально отразившись от оси x. В этом случае направление движения указателя также изменится на противоположное.

Это видно на правой стороне диаграммы. Фрагмент отдаленно напоминает картину "Твердость памяти" Сальвадора Дали с "плавящимися часами". У нас на диаграмме, как и ранее, изображен круг, в котором вращается стрелка – указатель. Параметры окружности: радиус R = 5,66, а центр имеет координаты x = 10, y = 0. Длина указателя или радиус окружности, которую описывает его конец, равны 5,6.

Знак параметра m выбран отрицательным и диаграмма это вновь "почувствовала", направив вращение указателя против часовой стрелки. Если для этой окружности мы выберем знак параметра m положительным, то "секундомер" просто отразится зеркально от оси x, а указатель будет вращаться как положено – по часовой стрелке.

Слева внизу диаграммы для наглядности изображена группа концентрических окружностей с центром в точке x = 3,1 и y = –1,9. Радиус самой большой окружности равен 1,1. Как и в случае с секундомерами, изменение знака параметра m на противоположный, в данном случае на отрицательный, приведёт к тому, что эта группа зеркально отразится от оси x и окажется в левой верхней части диаграммы.

Ещё раз обратим внимание: все криволинейные фигуры являются окружностями, а стрелки, указатели – прямыми линиями, вращающимися по окружности строго равномерно. Все визуальные деформации связаны исключительно с криволинейностью системы координат 2M-диаграммы.

Тороподобные поверхности

Известно, что полной и регулярной поверхности, внутренняя геометрия которой представляла бы геометрию полной плоскости Лобачевского, поверхности постоянной отрицательной кривизны не существует [26]:

"... не удаётся с помощью ни одной из известных до сих пор поверхностей постоянной отрицательной кривизны осуществить целиком всю плоскость Лобачевского. ...не существует аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей нигде особенностей и повсюду регулярной. ... на ... вопрос о том, можно ли по способу Бельтрами осуществить в евклидовом пространстве на некоторой регулярной аналитической поверхности всю плоскость Лобачевского, надо ответить отрицательно".

Математиками построено множество различных вариантов такой поверхности, самой известной из которых является псевдосфера Бельтрами [40]:

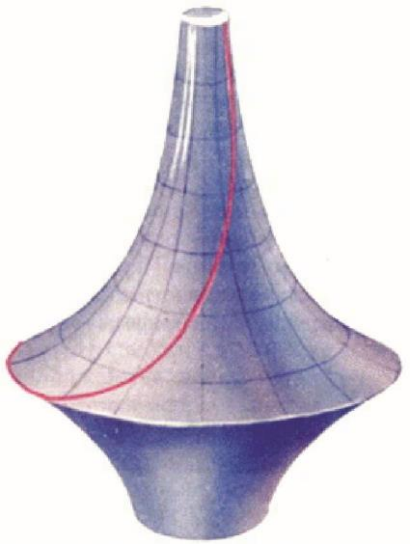


Рис.1. Псевдосфера Бельтрами (нижняя часть зеркально симметрична верхней)

Видно, что псевдосфера Бельтрами является замкнутой, как бы конической в две стороны. Рассматривая внимательно эту поверхность, можно заметить, что её название "псевдосфера", не совсем точно отражает её форму. Поверхность больше похожа на внутреннюю часть тора, поэтому название "псевдотор" больше соответствовало бы её виду. У обычного двухмерного тора поверхность имеет как седлообразные участки с отрицательной кривизной, так и сфероподобные участки с положительной кривизной. Можно сказать, что в некоторой степени тор снаружи – это подобие сферического пространства Римана, а внутри – подобие гиперболического пространства Лобачевского отрицательной кривизны [38]:

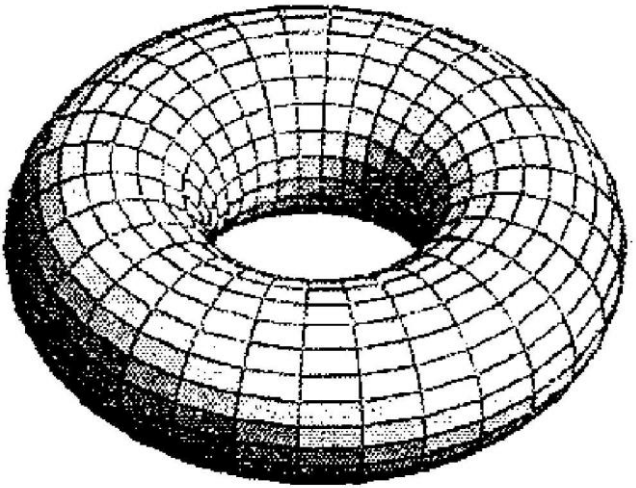


Рис.2. Тор имеет внутреннюю область отрицательной кривизны и внешнюю – положительной.

Если у тора "отрезать" поверхность положительной кривизны, то получится кусок поверхности отрицательной кривизны, отчасти напоминающий псевдосферу Бельтрами.

Изгибая его далее, можно получить поверхность постоянной отрицательной кривизны – катеноид [38]:

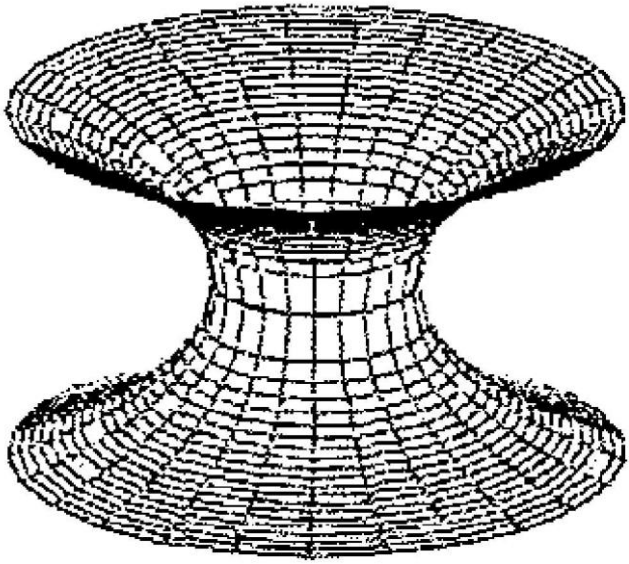


Рис.3. Катеноид напоминает внутреннюю поверхность тора

Как и классический тор, катеноид имеет конечную площадь поверхности. Однако её можно ещё более видоизменить, закрутив спирально [38], в результате чего получаем поверхность Куена, рисунок рис.4. Далее полученный катеноид рассекаем ещё раз – поперёк витка и удлиняем витки в обе стороны, как бы наматывая их друг на друга. Полученная спираль называется поверхностью Куена. Видимо, отрицательная постоянная кривизна получающейся поверхности при бесконечном наматывании внутренняя часть "намотки" сохранится, если поверхность вытягивать до бесконечности вдоль своей оси по вертикали, сжимая в центре в тонкую линию, а другой, внешний виток, также скручивая в бесконечно тонкую линию, как показано на рисунке рис.5.

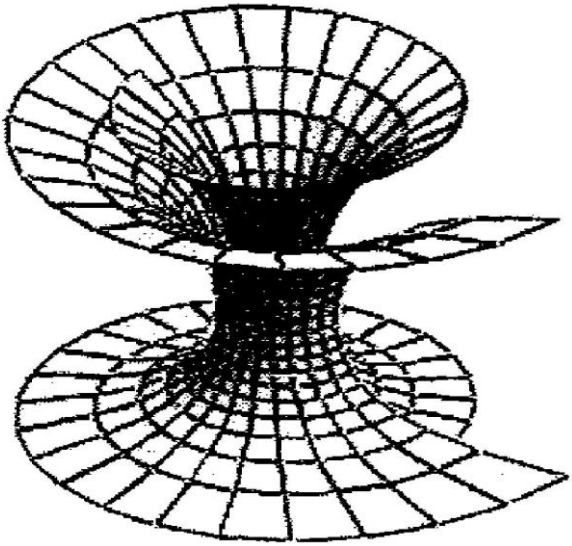


Рис.4. Поверхность Куена может быть получена из разрезанного и затем скрученного тора

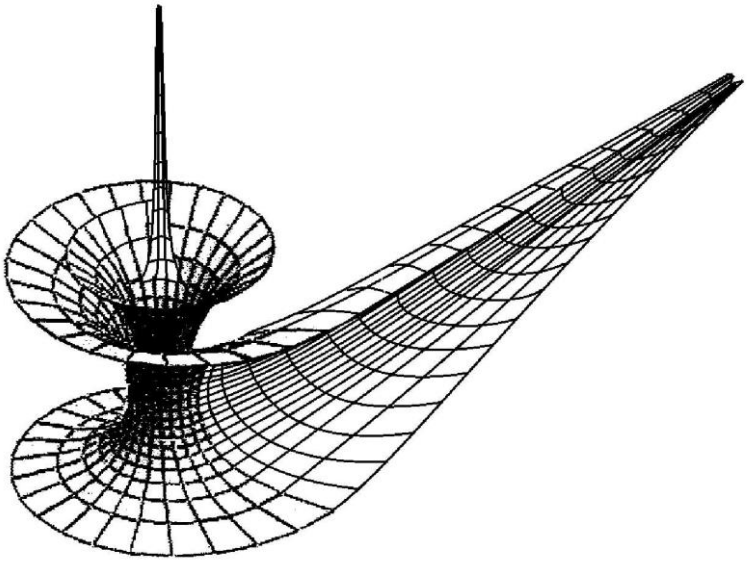


Рис.5. Растянутая поверхность Куена, имеющая постоянную отрицательную кривизну

Напротив, постоянство отрицательной кривизны не сохранится, если поверхность в витках будет повсюду однородной, но с переменным шагом, что исключает её самопересечение внутри. Подобным образом можно свернуть в спираль Архимеда и сам классический тор. Для этого его нужно разрезать поперёк, один из образовавшихся срезов сузить (на конус) и вставить в другой срез, широкий. После этого вытягивать концы в противоположных направлениях (спирально), как бы надевая образовавшиеся трубку на трубку. Поскольку способ образования и вид поверхности напоминает спираль Архимеда, такой "скрученный" тор можно назвать тором Архимеда:

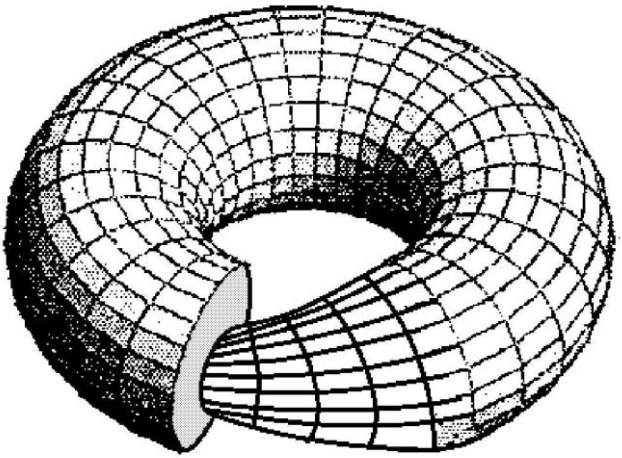


Рис.6. Тор Архимеда - тор, закрученный "сам в себя"

Очевидно, что получающийся многослойный тор будет иметь бесконечно большой диаметр (как наружный, так и внутренней кольцевой оси). Любое его сечение в плоскости центральной, прямой оси будет давать два набора концентрических окружностей:

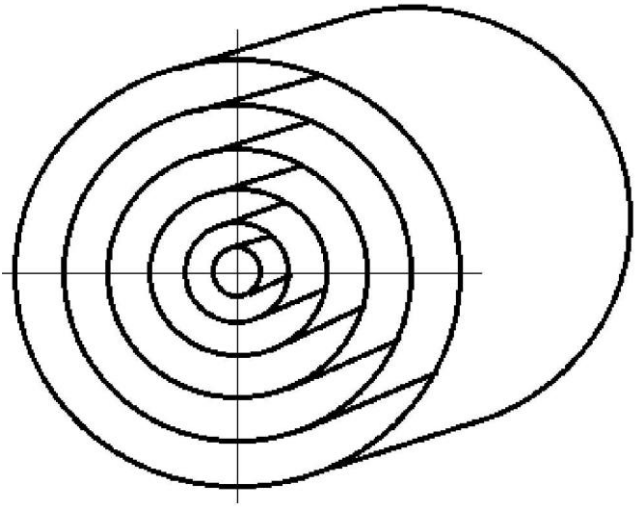


Рис.7. Поперечное сечение тора Архимеда может иметь вид концентрических кругов

Сечение в плоскости тора будет иметь вид сдвоенной спирали Архимеда. Сформировать этот тор можно и другим способом. Для этого нужно взять тонкое кольцо и наматывать на него виток к витку плоскую ленту (со срастанием кромок) слой за слоем. Диаметр и протяжённость внутреннего витка – круговой оси в процессе намотки должны постоянно увеличиваться. Очевидно, поверхность тора Архимеда имеет бесконечную площадь и не ограничена (с торцов). Хотя она и находится "внутри себя самой", она не имеет самопересечений.

Ещё одним вариантом такого закрученного тора является спиральная поверхность, которую за её определённое сходство можно назвать "Двойной улиткой". Две улитки как бы взаимно закручены перпендикулярно друг к другу:

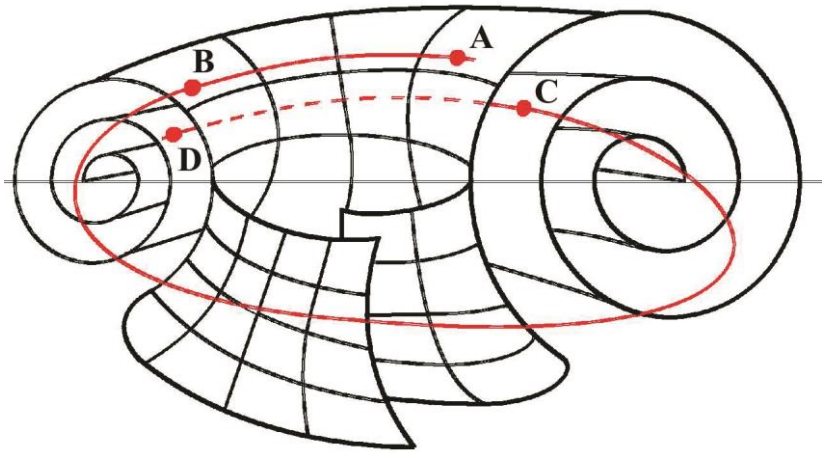


Рис.8. Поверхность "Двойная улитка" - дважды закрученная поверхность тора

В горизонтальной плоскости "улитки" её сечение имеет вид спирали Архимеда. В пределе эта спираль закручивается в точку, а в пространстве – в вертикальную ось поверхности. Это означает, что каждый внутренний лист буквально охватывает все листы из более удалённых от центра витков. Чем ближе виток к центру поверхности, тем дальше в бесконечность он уходит. Линия на поверхности вдоль витка представляет собой коническую спираль Архимеда: движение по линии от точки A через B и C к точке D – это движение по спиральной линии. Диаметр осевого витка (в плоскости "улитки") имеет бесконечную величину. Внутри витков поверхность бесконечно скручивается до нулевого диаметра – осевой линии "бублика". Внешний диаметр стремится к бесконечности.

Строится "Двойная улитка" почти так же, как спиральный тор. Нужно взять тор и разрезать по обеим образующим. Один из концов сузить и вставить в широкий (с небольшой конусностью). Один из поперечных краёв разреза вложить в другой и сворачивать в трубку всё меньшего

диаметра, вытягивая его внутрь по спирали. Одновременной внешний слой закручивать и вытягивать над внутренними спиральными витками до бесконечности. Всю "Двойную улитку" можно либо растягивать наружу (витки её будут равномерными, концентрическим), либо сохранять неизменным внутренний диаметр "бублика" (витки будут смещёнными, не концентрическими).

Пространственное линзирование

В космологии известно такое явление как гравитационное линзирование. Заключается оно в том, что пространство, искривлённое вблизи массивных тел, например, чёрных дыр, проявляет себя как линза. Свет, проходя через такую линзу, искривляется, фокусируется как от обычной стеклянной линзы.

Подобными же свойствами обладает и пустое пространство, без массивных тел, если это замкнутое искривленное пространство. Описание свойств таких пространств в литературе можно встретить довольно часто: сферическое пространство Римана, пространство постоянной отрицательной кривизны Лобачевского. Если пространство имеет положительную кривизну, то луч света, выпущенный в каком-либо направлении, через некоторое время вернётся к источнику с обратной стороны. Есть весьма красочное описание этого явления: в таком пространстве, как говорится, можно увидеть собственный затылок:

"... с разных сторон и в разные моменты времени за счет того, что свет много раз успевает обойти такой замкнутый мир за время расширения" [44].

Как модель пространства космологической замкнутой Вселенной часто рассматривают надувной шарик (сферическое пространство). При его раздувании макеты галактик, наклеенные на его поверхности, отдаляются друг от друга, оставаясь всегда в одной и той же точке координатной сетки. Очевидно, что луч света, выпущенный в таком пространстве, опояшет его и вернётся в исходную точку. Луч света в пространстве – это прямая линия. Светоносной средой для сферы является её поверхность. Поэтому луч света, двигаясь по этому пространству, повторяет его контуры – сферу. Для этого условного луча света нет направлений внутрь и от сферы, он распространяется по

ней вдоль линий больших кругов. Параллельные линии на сфере – это две большие окружности, проведённые через две рядом расположенные точки. Очевидно, что две такие параллельные линии пересекутся дважды. Отсюда следует, что все прямые линии, проведённые из одной точки, во-первых, пересекутся ещё раз, во-вторых, являются параллельными. Это один из примеров нарушения пятого постулата Евклида, в соответствии с которым, через точку можно провести только одну прямую, параллельную данной, то есть, не пересекающую её. В сферическом пространстве (положительной кривизны) таких прямых не существует.

Из приведённого описания можно заметить достаточно очевидную особенность такого пространства. Вопреки распространенному мнению, увидеть в таком пространстве свой затылок невозможно в принципе. Все лучи света, испущенные из точки, вернутся именно в эту точку. Это значит, что в какую бы область неба мы ни посмотрели, мы обязательно будем видеть лучи света, "испущенные нашим затылком". Изображение его будет "размазано" по всей сфере небосвода или видимой его части. Понятно, что для этого в пространстве Вселенной не должно быть ни других мешающих источников света, ни его поглотителей.

Тем не менее, подобные "изображения затылка" всё-таки имеют характерное, довольно интересное свойство. Возьмём, например, фотопластинку и на её тыльной стороне поместим источники света в виде ярких точек. Подождём достаточно долго и посмотрим на лицевую сторону фотопластинки. На ней проявится точное изображение этих точек, каждое напротив своего источника, находящегося на тыльной стороне. То есть, мы сделали своеобразную фотокамеру, которая будто бы сфотографировала источники. Но у этой камеры нет ни линзы, ни

тонкого обскурного отверстия. Изображение мы получили благодаря эффекту *пространственного линзирования*. В качестве линзы выступило само положительно искривлённое пространство. Этот эффект можно наблюдать только тогда, когда источник и фотопластинка находятся в одной точке пространства.

Если источник и приёмник находятся в разных точках пространства, то картина будет иной. Рассмотрим объект – стрелку А, находящуюся от экрана на расстоянии, много меньшем, чем длина окружности сферического мира. Очевидно, что лучи от точек источника не сойдутся в соответствующих точках на экране, поскольку они не диаметрально противоположные. Все лучи от точек объекта А будут распространяться в сторону экрана не по евклидовым параллельным линиям, а по дугам больших окружностей сферы. Поставим перед экраном обычную оптическую линзу **О**. Если пространство обычное, евклидово, то объект А отобразится на экране в изображение В. Если же это пространство имеет сферическую кривизну, то такое же изображение объекта В будет эквивалентно изображению от объекта А':

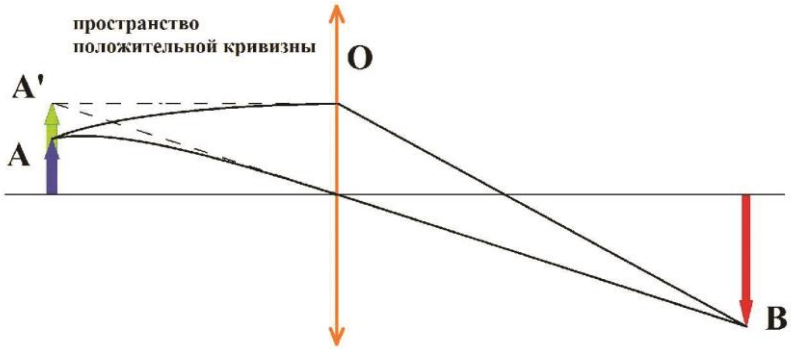


Рис.1. Пространственная увеличивающая линза

Физически объект А меньше объекта А', дающего такое же изображение В. То есть, как видно из рисунка, сферическая искривлённость пространства (пространство поверхности сферы) увеличивает изображение удалённого объекта. Точно также, если трехмерное пространство Вселенной замкнутое, сферическое, то все объекты во Вселенной, удалённые от нас, мы будем видеть увеличенными. Чем сильнее искривлено пространство, тем сильнее будет увеличение.

Такая картина будет в пространстве положительной кривизны. Но тогда возникает естественный вопрос, а каким будет изображение в пространстве отрицательной кривизны? Легко догадаться: если в плоском пространстве мы получаем неискаженное изображение, а в пространстве с положительной кривизной – увеличенное, то в пространстве отрицательной кривизны мы должны получить изображение уменьшенное. В пространстве отрицательной кривизны лучи света от источника расходятся, как показано на рисунке:

Рис.2. Направления лучей света прожекторов в различных пространствах

Каждый из прожекторов испускает поток параллельных лучей света. Но в пространстве положительной кривизны (сферический мир Римана) эти "параллельные" лучи на удалении сходятся, а в пространстве отрицательной кривизны (мир Лобачевского) эти "параллельные" лучи света расходятся. С учетом такого поведения "параллельных" линий в пространстве отрицательной кривизны, рас-

смотренный нами выше объект по сравнению с плоским пространством отобразится на экране уменьшенным:

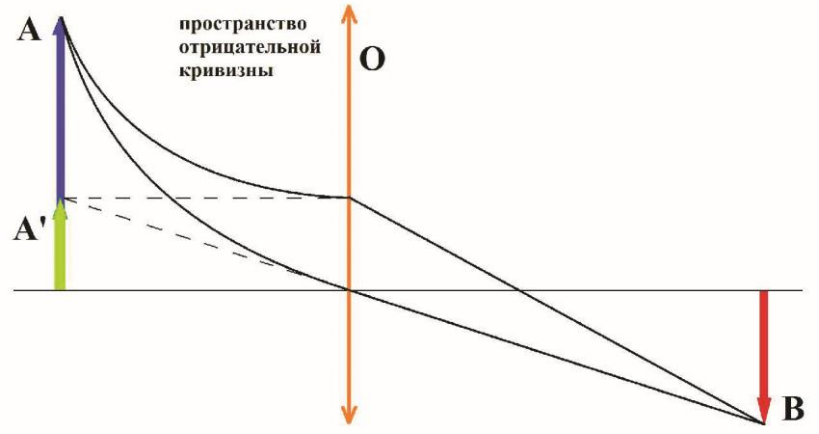


Рис.3. Пространственная рассеивающая линза

На рисунке объект A' - это источник в плоском пространстве, видимый через оптическую линзу **O** как изображение B. Такое же изображение B в искривленном пространстве отрицательной кривизны будет получено от объекта A, который больше объекта A'. Следовательно, пространство отрицательной кривизны обладает свойствами рассеивающей линзы.

Замкнутые пространства Евклида

Очевидно, что эффекты пространственного линзирования и возможность увидеть свой затылок присущи только замкнутым пространствам. В случае двухмерного пространства этим свойством обладают, например, такие хорошо известные поверхности: сфера, псевдосфера Бельтрами, тор, цилиндр, конус. Все эти поверхности не являются плоскостями Евклида. Очевидно, что изначально геометрия Евклида создавалась как геометрия плоского изотропного мира, хотя явно это не указано. Ни о какой

замкнутости евклидова пространства не было и речи. Впоследствии основные её положения (с существенными изменениями) довольно успешно были перенесены на замкнутые искривлённые сферическое и гиперболическое пространства. Однако, известно, что и сама геометрия Евклида имеет свой собственный евклидов замкнутый мир. Свернём, к примеру, в цилиндр лист с нарисованными параллельными прямыми. На поверхности цилиндра определение параллельности останется верным. Прямые теперь стали геодезическими, но они в точности повторяют все свойства плоских прямых линий Евклида. "Замыкание" в кривое евклидово пространство без пересечения может быть осуществлено сворачиванием плоскости Евклида только в цилиндр или в конус. Эти поверхности являются изометричными по отношению к обычной плоскости Евклида:

"Изометричные поверхности — поверхности в евклидовом или римановом пространстве такие, что между ними можно установить взаимно однозначное точечное соответствие, при котором каждая спрямляемая кривая одной из поверхностей имеет своим образом тоже спрямляемую кривую и той же длины" [34].

На то, что геометрия на поверхностях конуса или цилиндра сохраняет свойства геометрии на плоскости Евклида, обращали внимание, например, Риман:

"... цилиндрические или конические поверхности существенно не отличны от плоскости, так как могут быть получены из плоскости посредством одного лишь изгибания, причем внутренние метрические отношения остаются неизменными и все теоремы, касающиеся этих отношений, то есть вся планиметрия, остаются в силе" [56].

На это указывал и Рашевский:

"Термин "изгибание" связан с наглядным представлением о поверхности как о гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленке; такую пленку можно изгибать в пространстве, меняя ее форму, но сохраняя длины всех кривых на ней. Примером может служить свертывание плоского листа бумаги в цилиндр или конус" [54].

Однако, следует уточнить, что эти пространства являются пространствами Евклида лишь локально, ограниченно. На конусе (если угол сегмента развертки меньше π) и цилиндре нарушается третий постулат Евклида [30], [82]:

"3. И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг".

Нарушение третьего постулата автоматически ведёт к другим ограничениям. Например, на цилиндре существуют замкнутые "прямые", что является нарушением постулата о неограниченном продлении прямой: если идти по этой прямой линии, то придёшь в исходную точку. Две пересекающиеся прямые на цилиндрической поверхности при неограниченном продлении имеют неограниченное число точек пересечения.

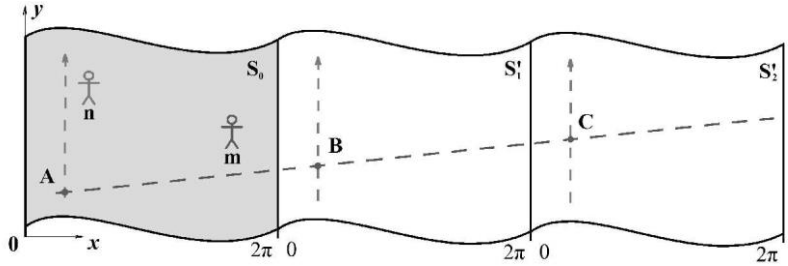


Рис.4. Развертка цилиндрической поверхности S_0. Для наглядности по горизонтали показаны приложенные встык друг к другу несколько разверток - S_1, S_2. Ось y - направление оси цилиндра.

Это означает, что внутренние наблюдатели могут экспериментально определить замкнутость своего мира.

Например, два путешественника будут периодически встречаться, если один идёт перпендикулярно к замкнутой координате (то есть, вдоль оси цилиндра), а второй – не параллельно к ней в одну сторону с первым (то есть, по винтовой линии). Если они оставляют след, то эти следы будут периодически пересекаться. В кривом цилиндрическом мире Евклида можно увидеть свой затылок. На рисунке показаны несколько разверток одного и того же цилиндра, приложенных друг к другу для наглядности, рисунок рис.4.

На поверхности цилиндра две параллельные прямые могут иметь множество совпадающих точек, сливаться, что нарушает аксиому Гильберта I_2 группы принадлежности "Каковы бы ни были две точки *A* и *B*, существует не более одной прямой, проходящей через эти точки":

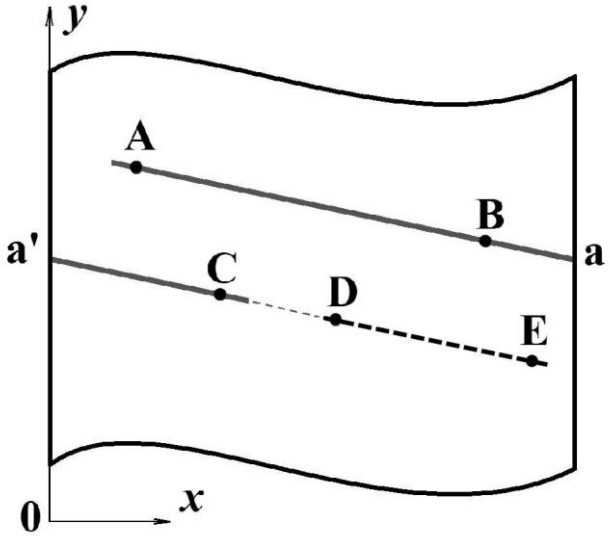


Рис.5. Развертка цилиндрической поверхности. Параллельные прямые пересекаются. Ось y – направление центральной оси цилиндра.

Показана развертка цилиндра (ось цилиндра – вертикальна). Параллельно прямой AB проведена прямая DE. Прямая AB продолжена до точки C и проходит под углом к оси цилиндра (не замкнута). Видно, что при дальнейшем её продолжении она сольётся с прямой DE.

Таким же локально евклидовым пространством является и конус: на конической поверхности существуют, по меньшей мере, две прямые линии, которые при неограниченном продлении пересекаются в двух точках; могут существовать прямые линии, которые самопересекаются и, следовательно, параллельные пересекающиеся прямые. Конус образуется из плоскости Евклида склейкой двух сторон угла и сворачиванием куска плоскости. На следующем рисунке показана развёртка конической поверхности. Как и в примере с цилиндром на одном рисунке показаны совмещённые встык четыре одинаковые развертки кривого конического пространства – конуса AoB:

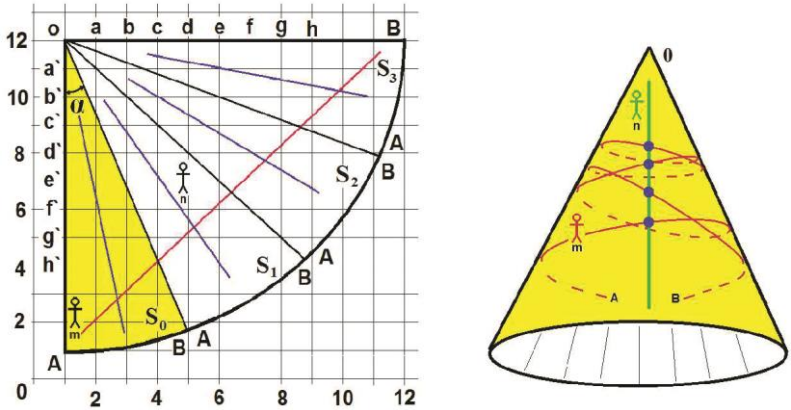


Рис.6. Развертка конической поверхности S_0. Для наглядности по горизонтали показаны приложенные встык друг к другу несколько дополнительных разверток S_1, S_2, S_3. AB - линия окружности основания конуса. Справа: траектории движения внутренних наблюдателей по поверхности конуса.

В коническом мире траектории движения внутренних наблюдателей – двух путников m и n будут пересекаться с увеличивающейся периодичностью (всё реже), если один из них – n идёт от вершины конуса (по образующей), а другой - m идёт мимо вершины, то приближаясь по кривой к вершине, если смотреть извне, то удаляясь от неё, но на самом деле, всегда двигаясь строго по прямой на развёртке конусной поверхности.

В зависимости от угла развертки конического мира (угла сегмента AoB = α) они могут быть шовными и бесшовными. Бесшовный конический мир может быть образован только сегментами с углами α, кратными π/2. Если α = 2π, образуется обычный плоский мир Евклида; если α > 2π, образуется спиральный конический самопересекающийся мир. На рисунке слева изображен конический бесшовный мир с минимально возможным углом α = π/2:

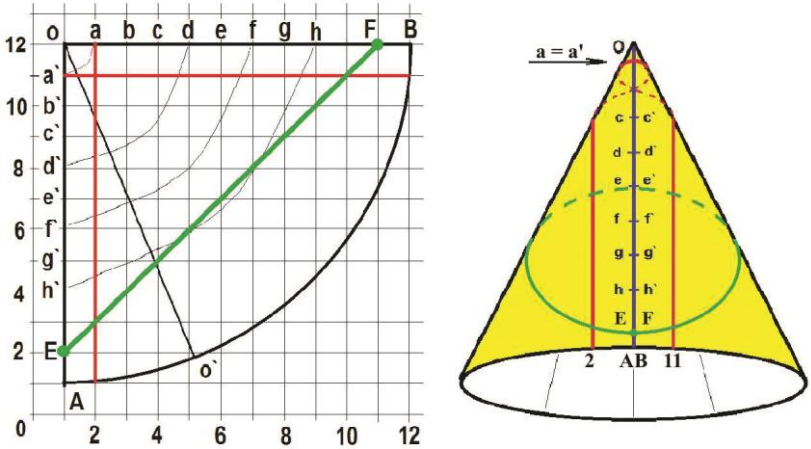


Рис.7. Простейший конический бесшовный мир.

Это наименьший конический бесшовный замкнутый мир. Он образуется сворачиванием сегмента AoB в конус, в результате чего при склейке границ плоскости точки aa`, bb`... hh` совместятся друг с другом. Как видно на рисунке,

в этом случае на поверхности конуса соответствующие квадраты поверхности ровно стыкуются своими сторонами, неразрывно переходя друг в друга, поэтому на поверхности конуса все элементарные ячейки будут в точности квадратными, равными в развёртке друг другу. Если взять сегмент, с углом α, не кратным π/2, например, Aoo`, то точки a`... h` не совместятся с аналогичными точками на другом радиусе сегмента. Два радиуса Ao и oo` окажутся со смещёнными вдоль радиуса квадратами поверхности, образуя шов Ao=oo`.

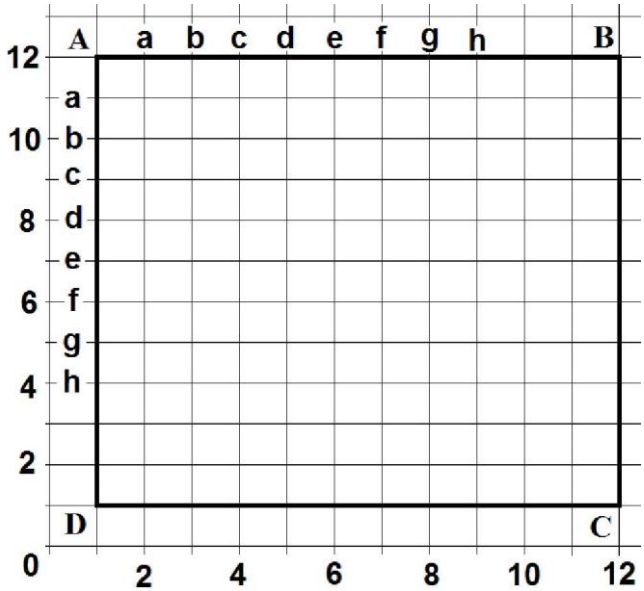


Рис.8. При склейке сторон AB и AD образуется трёхсторонний квадрат

На рисунке видно, что на этом сегменте можно провести прямую линию EF, которая пересечёт оба его радиуса oA и oB. Это означает, что на поверхности образовавшегося конуса будет замкнутая или спиральная евклидова прямая линия. Обращаем на это особое внимание:

это настоящая прямая евклидова линия, которая сама себя пересекает, не имея при этом ни изломов, ни перегибов!

На конической поверхности при склейке образуется трёхсторонний квадрат – квадрат, у которого отождествлены, склеены две рядом расположенные стороны – рисунок рис.8. Сторона AB – это тождественно сторона AD, что показывают одинаковые обозначения точек a...h на них. Поэтому у этого квадрата три стороны: AB=AD, BC и CD (триквадрат). Периметр триквадрата, таким образом, равен утроенной длине его стороны, но площадь равна квадрату стороны. На конусе прямые самопересекаются, следовательно, пересекаются и параллельные:

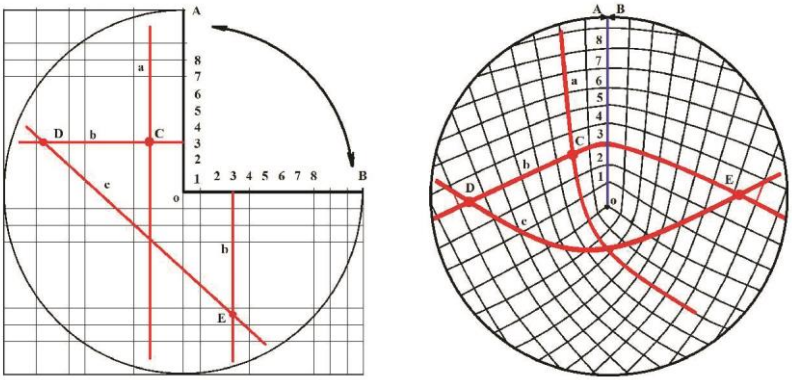


Рис.9. На конической поверхности прямые пересекаются в двух точках

Цилиндр и конус являются недеформированными поверхностями и образованы склейкой плоскости Евклида в одном из направлений. Осуществить склейку плоскости Евклида таким образом, чтобы получилось недеформированное пространство, замкнутое по всем направлениям (координатам), невозможно:

"... если отождествить в квадрате точки каждой стороны с соответствующими точками противоположной

стороны, то квадрат "склеится" в двумерное многообразие, устроенное наподобие тора. При этом все четыре вершины склеятся в одну точку, в которой сойдутся все четыре угла квадрата. Если сохранить в этом многообразии прежнюю метрику, то мы получим пример локально евклидова пространства двух измерений (разумеется, это пространство приходится рассматривать абстрактно, не пытаясь реализовать его в виде тора в обычном пространстве: в последнем случае метрика не может быть локально евклидовой)" [55].

Если склеить, отождествить противоположные стороны квадрата, то на полученной поверхности будут выполняться все положения геометрии Евклида, кроме тех, которые связаны с неограниченным продлением линий (фигур). Если размеры такой линии (фигуры) превысят размеры квадрата, будут нарушены положения параллельности, единственности линии, отсутствия выделенных направлений и других. Такой "склеенный квадрат", таким образом, как бы имеет только две стороны (биквадрат). Способ его образования позволяет назвать его также своеобразным цилиндром: сферическим (стягивание в одну точку углов) или двухосевым (скручивание по двум осям). Выделенные направления – это поперечные, диагональные и спиральные. Несмотря на анизотропию, то есть наличие выделенных направлений, на такой замкнутой плоскости выполняются все законы евклидовой геометрии (с учетом ограниченности длин прямых), при этом вследствие её замкнутости, можно увидеть собственный затылок, причём в бесконечном количестве направлений.

На рисунке рис.10 показана фигура – треугольник, который имеет линейные размеры, превышающие сторону квадрата ABCD. В зависимости от ориентации и положения этой фигуры, видимость её в пространстве различна.

Такая фигура может быть видна одновременно с двух сторон: спереди и сзади. Симметрия частей различна в зависимости от направления оси фигуры: либо скошено как элементы I-II-III (левая часть рисунка), либо на одной оси как элементы I-II (средняя часть рисунка). Любая линия при неограниченном продлении может появиться с противоположной стороны, параллельно самой себе. На правой части рисунка линия a, неограниченно продлённая вперёд, появляется в пространстве как линия a', а продлённая назад – как линия a". Точки e - e' и g - g' являются отождествлёнными точками на сторонах квадрата ABCD.

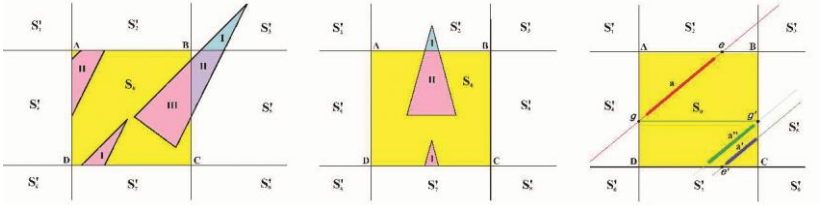


Рис.10. Плоскость ABCD, склеенная по двум координатам (показана развертка S_0, повторенная многократно встык S_1...S_8). Изобразить трехмерную модель этого пространства невозможно, это своеобразный "сферический цилиндр".

Цилиндрический и конический миры Евклида, видимо, являются единственно возможными двухмерными плоскими замкнутыми мирами, которые локально обладают всеми свойствами плоского мира Евклида. Выводы, полученные при их рассмотрении, можно распространить по аналогии и на трехмерное замкнутое пространство. В литературе очень часто наш реальный физический мир изображают графически в виде сферы. На самом деле трехмерная сфера может находиться только в пространстве четырёх измерений (не считая времени). Изобразить её в аксонометрии невозможно, поэтому и прибегают к упрощениям в виде двухмерной сферы в трехмерном пространстве. Это

частный случай кривого трехмерного пространства – изотропное замкнутое пространство.

По аналогии с двухмерным пространством (поверхностью) мы можем "свернуть", замкнуть координаты трёхмерного пространства в окружности, отождествить противоположные грани трёхмерного куба, получив так называемый "трёхмерный тор" или трёхсторонний куб – трикуб. Графически изобразить такое замкнутое пространство невозможно. Очевидно, что полученный замкнутый мир является анизотропным – в нём появляются выделенные направления. В этом мире любой луч света вернётся в исходную точку, в нём можно увидеть свой затылок. Анизотропия направлений проявляется в том, что диагональные направления будут более длинными, чем по координатам. Такой неявно представляют структуру нашей Вселенной: с одной стороны она считается евклидовой, а с другой – замкнутой. Известны безуспешные попытки найти в ней "духов" – повторные изображения галактик, увидеть свой затылок.

Описание замкнутых евклидовых пространств, как показано, основано на двух принципиально отличных приёмах: склейки и отождествления. Метод склейки, видимо, следует считать физическим приёмом, а метод отождествления – математическим. Это значит, что склейка плоскостей или пространств в итоге даёт физический объект, который можно, например, изготовить в виде макета, объекта, который может реально существовать. Например, склейка ленты Мёбиуса может быть произведена, так сказать, на рабочем столе. Склейка конуса, цилиндра – реальные физические процедуры. Напротив, отождествление – это метод исключительно математический, который не обязательно позволяет создать физический, материальный объект. Например, отождествление точек на сфере образует

эллиптическое пространство Римана, которое, если и можно представить, то изготовить в виде макета не представляется возможным. Отождествление сторон квадрата невозможно не только повторить на макете, но даже и представить сложно. Тем более, отождествление граней куба. Однако, как математические модели – они в высшей степени удобны и интересны. Очевидно, математическое описание их не имеет никаких принципиально непреодолимых трудностей.

Принимая во внимание эти доводы, следует усомниться в возможности наличия у Вселенной двух исключающих друг друга свойств: евклидовой метрики и замкнутости. Если Вселенная замкнута, то у неё не может быть евклидовой метрики, поскольку невозможно представить себе "отождествление" граней Вселенной. Напротив, если допустить такую возможность: физичность процедуры "отождествления" точек пространства, то следует распространить эту процедуру и на другие физические теории. Например, на теорию струн.

Многообразия Калаби-Яу

С 19-го века в физике живёт и активно обсуждается идея создания так называемой Теории Всего. Альбер Эйнштейн уделял ей большое внимание, посвятив большую часть своей жизни попыткам создания такой теории. Сейчас под нею подразумевают объединённую физико-математическую теорию, описывающую все известные на сегодняшний день фундаментальные взаимодействия: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое ядерные взаимодействия. На этом пути встретилось множество трудностей. Например, выяснилось, что ведущие физические теории – квантовая механика и теория относительности несовместимы на микроскопическом уровне. Во

второй половине 20-го века возникла новая физико-математическая теория – теория струн, которая позволяла изначально объединить все фундаментальные взаимодействия, претендуя тем самым на роль Теории Всего. Но с самого своего возникновения теория струн для корректного описания свойств частиц требовала использования от 10 до 26 измерений. Последняя на сегодняшний день версия теории суперструн – М-теория требует, по меньшей мере, наличия у пространства 7 дополнительных измерений, то есть, всего 11 измерений, в том числе, 10 – пространственных измерений и одно временное. Поскольку в реальности мы никогда не наблюдали более трёх пространственных измерений, в теории суперструн производится так называемая компактификация, то есть свёртывание "лишних" пространственных измерений в своеобразные кольца. Размеры этих колец чрезвычайно малы, поэтом никакими современными приборами измерить, увидеть их невозможно.

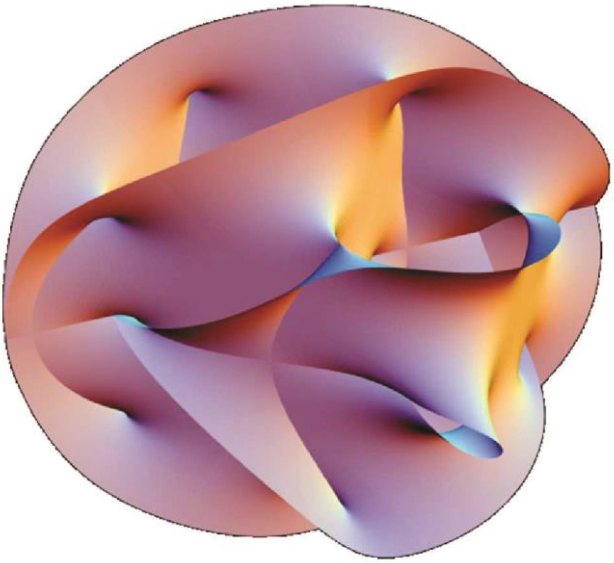


Рис.11. Трёхмерная визуализация многообразия Калаби-Яу

Свернуть в кольца 7 дополнительных измерений можно различными способами. Например, 2 измерения можно свернуть в сферу или в тор. Если добавить третье измерение, то при свёртке трёх измерений получится пространство, представить которое крайне затруднительно. Кроме того, свернуть эти пространства можно ещё большим количеством способов. Для 7 измерений способов свернуть пространство несопоставимо больше, а изобразить их графически вообще невозможно. То, что в интернете выдаётся за многомерное свёрнутое пространство – многообразие Калаби-Яу, на самом деле является трёхмерным объектом – рисунок рис.11.

Как видно на рисунке, такое тело достаточно просто нарисовать и даже изготовить, например, из пластилина. Считается, что число вариантов струнных теорий в М-теории, приводящих к приемлемым в разной степени результатам, превышает 10^{500}. Вместе с тем, существует рассмотренный выше способ отождествления. Если допустить физичность этой процедуры – отождествления, то можно осуществить отождествление крайних точек каждого из дополнительных измерений, вместо "сворачивания" их в окружности. При этом полученное многомерное пространство будет тождественно многомерному плоскому евклидову пространству, с учетом особенностей неограниченного продления линий. Такая компактификация "лишних" измерений в теории струн через отождествление, видимо, имеет единственный вариант и не требует столь сложных многообразий, как Калаби-Яу. В результате количество струнных решений М-теории, "ландшафт теории" может существенно сократиться.

Парадоксы параллельности

1. Сущность параллельности

В ряде источников, учебников, рассматривающих вопрос определения внутренним, *двухмерным* наблюдателем кривизны собственного пространства, можно встретить утверждение, что он способен сделать это без привлечения понятия пространства большей размерности, так называемого пространства погружения:

"... внутренняя кривизна пространства-времени, т.е. кривизна, при определении которой не только не используется погружение в какое-либо гипотетическое плоское многообразие более высокой размерности, но даже не допускается мысли о возможности такого погружения" [42, т.1, с.411].

"В двумерном случае можно представить кривое пространство вложенным в трехмерное пространство. Однако пространство данной размерности можно изучать и непосредственно, по внутренним свойствам, не обращаясь к идее вложения. ... Итак, отличие кривой поверхности от плоской можно обнаружить, исследуя геометрию самой двумерной поверхности, без вложения" [31, с.108].

В качестве одного из способов такого определения кривизны изнутри чаще всего рассматривается явление поворота, изменение направления вектора при его параллельном переносе по замкнутому контуру:

"Кривизна многообразия сама по себе выражается через изменение направления вектора, возникающее при параллельном переносе вектора по небольшому замкнутому контуру. Изменение направления вектора зависит от исходного направления вектора, а также от ориентации двумерной поверхности, в которой расположен этот замкнутый контур; при заданной ориентации изменение

направления вектора пропорционально площади, охватываемой замкнутым контуром. [16, с.82].

Обратим внимание на то, что и название процедуры переноса и её описание содержат слово "параллельный". Однако в искривлённом пространстве такого понятия не существует по определению. В искривлённом пространстве нет и быть не может параллелей, параллельных прямых в традиционном, евклидовом смысле этих понятий. Примечание: далее в цитатах мы будем заменять уравнения и специфические обозначения переменных многоточием там, где они не влияют на смысл утверждений в цитатах и выводы в них, но усложняют текст. Под традиционным, евклидовым смыслом следует понимать их определение, данное Евклидом:

"23. Параллельные **) суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно ***), ни с той ни с другой "стороны" между собой не встречаются ****) (17).

**) ... т.е. прямые, проведённые друг подле друга.

***) ... буквально "в неопределённость". Греки избегали нашего понятия "бесконечность".

****) ... совпадают, сталкиваются, встречаются друг с другом, но ни в коем случае не пересекаются" [30, с.14].

В плоском пространстве Евклида все прямые, параллельные одной прямой, также параллельны друг другу. Безусловно, такое определение параллельности можно назвать фундаментальным, поэтому все авторы практически без исключения в дальнейшем используют его строго в таком же виде:

"... под параллельным прямым мы понимаем прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек" [26, с.459].

"... две прямые называются параллельными, если они, находясь на одной плоскости, не пересекаются (т.е. не имеют ни одной общей точки)" [14, с.6].

На похожее описание этого определения ссылается сайт Википедии:

"В евклидовой геометрии параллельными прямыми называются прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются ..." [46].

Такое же определение находим ещё по одной ссылке:

"... прямые, принадлежащие одной плоскости, если они не имеют общих точек или совпадают" [48].

Заметим, что здесь понятие параллельности необоснованно, на наш взгляд, расширено на прямые линии, совпавшие, слившиеся в одну. Напротив, в сферическом пространстве, на сфере параллельных друг другу линий, как указано в следующих трёх цитатах, нет вообще и даже нет простого аналога:

"В отличие от прямых, два больших круга всегда пересекаются – нет аналога параллельных прямых!" [43, с.12].

"... определяющим свойством евклидовой (плоской) геометрии является постулат параллельности: изначально параллельные прямые остаются параллельными навсегда. ... в искривленном пространстве это не так; на сфере ... изначально параллельные геодезические со временем пересекутся" [4, с.86].

Обратим внимание на фрагменты "изначально параллельные... со временем" и используемое в таком же контексте "некоторое удаление". По этому поводу возникает резонный вопрос. До какой точки на геодезической, на меридиане сферы эти понятия "изначально" или "некоторое удаление" сохраняются, действуют? На каком удалении от экватора? Этот вопрос не освещается в литературе явно, но указанное, возникающее нарушение параллельности опи-

сывается повсеместно. На самом деле на искривлённой поверхности вообще не существует точек, где эти *условные* прямые параллельны.

"Из двумерной аналогии – геометрии на сфере – видно, что понятие параллельных линий, содержащееся в пятом постулате Евклида, в сферической геометрии вообще теряет всякий смысл, ибо любая дуга большого круга, проходящая через точку С, лежащую вне круговой линии АВ, обязательно пересекает АВ, притом в двух точках" [25, с.15].

Аналогами *прямых* вообще в таких пространствах определены геодезические, линии *наименьших* расстояний. Именно эти линии считаются в этих пространствах *прямыми* линиями, хотя на самом деле они являются линиями *кривыми*. Попытки ввести евклидово понятие *прямой* линии на искривлённой поверхности неизбежно ведёт буквально к рекурсии: определению параметра через сам определяемый параметр.

Определение прямой линии

Очевидно, одними из первых, если не самыми первыми математическими, геометрическими определениями прямой линии, а также плоскости – плоской поверхности и параллельных прямых, являются определения, данные Евклидом:

"4. Прямая (4) линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней...

7. Плоская поверхность (6) есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней..." [30, с.11].

Определение прямой линии Евклидом можно было бы признать "автономно неполным". Действительно, окружность вполне можно считать "равно расположенной" относительно точек на ней. Исключение окружности из

определения обеспечивает второй постулат, который исключает её из определения буквальным уточнением, что эта линия незамкнута, то есть, имеет концы. Однако самым веским доводом было бы дополнение первого постулата указанием, что эта проведённая прямая линия – единственная.

"1. Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию.

2. И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой ******) (19)" [30, с.14].

Нам неизвестны строгие, обоснованные возражения против определения прямой Евклида, но известно другое подобное определение прямой линии:

"Параллельное перемещение может дать возможность ввести понятие о прямой линии. В каждой точке кривой эта кривая имеет определенное направление, характеризуемое направлением бесконечно малого вектора" [65, с.38].

Здесь понятие прямой линии выводится из произвольной линии, кривой в общем случае. Сразу же отметим, что определение опирается на взаимосвязанные и пока сами плохо определённые параметры: параллельность, направление и, вообще-то, вектор, который уже представляет собой отрезок прямой линии.

"Возьмем в некоторой точке ... кривой бесконечно малый вектор, определяющий направление в этой точке кривой ...; переместим параллельно этот бесконечно малый вектор в какую-либо точку. ... Таким образом, вместо того, чтобы говорить о направлении кривой в точке P, мы можем теперь говорить о направлении бесконечно малого вектора в точке P" [65, с.38].

Несомненно, в *указанной* точке даже бесконечно малый вектор имеет какое-то направление, и это направ-

ление мы можем *выбрать* совпадающим с направлением кривой.

"Кривую, обладающую тем исключительным свойством, что направление параллельно перемещенного в любую точку P указанного только что вектора совпадает с направлением кривой в этой точке, условимся называть прямой линией; прямая линия отличается от всех других кривых тем исключительным свойством, что направление ее вдоль по самой линии параллельно перемещается" [65, с.38].

Что значит "параллельно перемещается"? Вообще, что такое *параллельное* перемещение по поверхности, на которой параллельные линии *отсутствуют* по определению? На таких поверхностях возможно только *эквиугловое* перемещение, то есть, перемещение с сохранением угла между переносимым вектором и линией переноса. В нашей работе мы используем термин, понятие "эквиугловое", а не "равноугольное", поскольку последний термин использован Пенроузом и имеет несколько иной смысл:

"Равноугольная – или логарифмическая – спираль есть плоская кривая, образующая постоянный угол с прямыми линиями, исходящими из некоторой точки на плоскости" [51, с.102].

Отметим, что в предыдущей цитате [65, с.38] явно не использовано понятие касательных, но, видимо, оно подразумевалось. Использование касательных в исследуемом механизме переноса векторов мы считаем некорректным и даже ошибочным. Приведённое определение прямой линии и "исключительное" свойство выглядят несколько противоречиво или неполно.

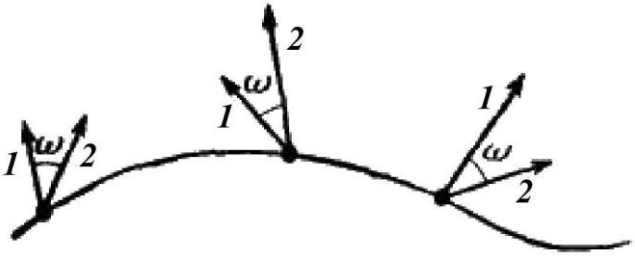


Рисунок из работы [65]

"... остановимся на ... таком параллельном перемещении, которое оставляет неизменным угол двух параллельно перемещающихся по одной и той же кривой векторов ..." [65, с.36]

Замечаем неточность, двусмысленность. В данном определении явно читается, что неизменным остаётся угол ω между двумя *связно* перемещаемыми векторами. Такое определение параллельного переноса вектора кардинально отличается от того, какое используется в исключительном большинстве иллюстраций поворота вектор при таком переносе. Однако ни при каком перемещении этот угол не меняется.

"Само собой разумеется, что для различных определений параллельного перемещения мы будем иметь и разное определение прямых линий" [65, с.38].

Правда, выше в цитируемой работе даётся описание *традиционного* параллельного перемещения:

"Чтобы дать более ясное представление о параллельном перемещении, рассмотрим это понятие для обычной эвклидовой плоскости, определив параллельное перемещение вектора как обычный параллельный перенос вектора из одной точки в другую ... перенос, при котором величина вектора не меняется, а прямые линии, на которых лежит вектор до и после перемещения, остаются параллельными (в обычном смысле). ... Нетрудно видеть, что,

при только что установленном определении параллельного перемещения, угол для двух параллельно перемещающихся векторов не меняется, равно как не меняется и величина параллельно перемещающегося вектора; таким образом, эвклидово параллельное перемещение характеризует пространство, являющееся частным случаем пространства Римана" [65, с.37].

И не только его. Указанное параллельное перемещение не изменяет угол между векторами ни в каком пространстве.

"Возьмем в некоторой точке Ро нашей кривой бесконечно малый вектор, определяющий направление в этой точке кривой ...; переместим параллельно этот бесконечно малый вектор в какую-либо точку Р кривой, тогда, в большинстве случаев, направление перемещенного в точке Р вектора не будет совпадать с направлением нашей кривой в этой точке. Кривую, обладающую тем исключительным свойством, что направление параллельно перемещенного в любую точку Р указанного только что вектора совпадает с направлением кривой в этой точке, условимся называть прямой линией; прямая линия отличается от всех других кривых тем исключительным свойством, что направление ее вдоль по самой линии параллельно перемещается. Само собой разумеется, что для различных определений параллельного перемещения мы будем иметь и разное определение прямых линий. Обратимся теперь к эвклидовой плоскости. В ней, очевидно, будут иметься кривые, не обладающие тем свойством, что их направление вдоль по кривой перемещается параллельно ..., но будут и определенные выше прямые линии, каковые" [65, с.38].

Здесь следует указать на необходимость определения также и понятия *направление*. В противном случае приведённое определение прямой линии довольно легко приме-

нить к "прямым" на сфере, поскольку описываемый в литературе параллельно переносимый вдоль геодезической на сфере вектор, его "направление" *всегда* совпадает с геодезической. Однако большие круги на сфере, геодезические *прямыми* как таковыми не являются.

Смысл геодезической

Аналогами прямых в искривлённых пространствах определены, "назначены" геодезические, линии *наименьших* расстояний, считающиеся в этих пространствах *прямыми* линиями, но на самом деле являющиеся линиями *кривыми*. Попытки ввести понятие *прямой* линии на искривлённой поверхности неизбежно ведёт буквально к рекурсии: определению параметра через сам определяемый параметр. Рассмотрим подробнее смысл, вкладываемый в понятие геодезической линии, определение геодезических.

"... можно однозначно определить линию, являющуюся кратчайшей между двумя точками. Например, на поверхности сферы этими линиями являются большие круги. Такие кратчайшие линии называются геодезическими" [17, с.107].

Видим, что в данном определении решающим, определяющим свойством названа *длина* линии.

"... геодезическая линия, определяется как кривая, проходящая через две данные точки, расстояние вдоль которой между этими точками меньше, чем расстояние по любой другой кривой, проходящей через эти же точки" [15, с.60].

Здесь уточняется, что геодезическая не только кратчайшая, но и определена как *кривая* линия. Правда, следовало бы уточнить, с чьей точки зрения. Нередко рассматриваются так называемые "плосковитяне" – обитатели этого искривлённого двухмерного пространства. По всей

видимости, для них "кривая геодезическая" видна столь же прямой, как и обычная евклидова прямая, и может быть определена точно так же, как в его геометрии.

"... в "искривленном" неэвклидовом пространстве — времени, тела двигаются по так называемым геодезическим линиям, которые представляют четырехмерное, т.е. пространственно-временное обобщение "прямейших" линий неэвклидовой геометрии" [29, с.31].

"... объекты движутся в искривленном пространстве – времени по наикратчайшим путям. Такие пути именуются геодезическими линиями. Геодезическая – это обобщение понятия прямой линии в плоском пространстве" [36, с.80].

"Геодезическими называются такие кривые, которые на данной поверхности (локально) служат "кратчайшими маршрутами" [50, с.172].

"Геодезические линии, соответствующие мировым линиям физических тел, скорость которых меньше скорости света, оказываются линиями *наибольшего* собственного времени, то есть времени, измеряемого часами, жестко связанными с телом" [52, с.111].

Последнее определение несколько выпадает из общего контекста. Действительно, на первый взгляд следовало бы ожидать, что движение по более короткой линии, каковой и является геодезическая, должно потребовать меньшего времени.

"Геодезическая – это кривая, касательная которой переносится параллельно самой себе, то есть это "максимально прямая" кривая" [12, с.29].

Здесь просматривается бесконечно малый вектор из определения прямой, эквивалент касательной, переносимый параллельно, тождественно сохранению "направления". Не удивительно, что и здесь геодезическая отождествляется с прямой линией, правда, *максимально* прямой.

Однако есть здесь и сомнительный момент. На искривлённой поверхности нет и быть не может евклидовых прямых, каковыми по определению являются касательные к ней. Кроме того, касательная не принадлежит искривлённой поверхности и может переноситься *только* в пространстве погружения, за пределами поверхности. А в таком пространстве понятие параллельности имеет чёткое, евклидово определение. Есть и более замысловатое определение, из которого, тем не менее, следует, что геодезическая всё-таки не является прямой линией, это линия кривая, хотя и "прямейшая":

"*Геодезической линией на поверхности называется кривая, геодезическая кривизна которой в каждой точке равна нулю.* Таким образом, смысл этого определения в том, что оно выделяет класс "прямейших" линий на поверхности" [54, с.379].

Уточним, что *геодезическая* кривизна линии отличается от кривизны *поверхности* и означает, что *кривая* лежит в *плоскости*, ортогональной к поверхности в данной точке.

"... геодезическая линия, соединяющая две точки, является не только линией со стационарным значением длины, но и "наипрямейшей" линией" [41, с.231].

Вновь приводится компромиссное название – "наипрямейшая линия". Но, если "наикратчайшая" не вызывает никаких нареканий, то "наипрямейшая", несомненно, является определением условным и, по большому счёту неверным.

"Пусть касательный вектор к кривой l в точке s_0 переносится параллельно вдоль этой кривой в точку s. Если перенесённый таким образом из точки s_0 в произвольную точку s касательный вектор оказывается равным касательному вектору к кривой l в точке s, то такая кривая называется *геодезической линией"* [24, с.59].

Отметим спорность такого определения. Касательная к геодезической в искривлённом пространстве является *фрагментом* этой геодезической, сливается с нею. Поэтому можно было сразу сказать: если описанные вектор и касательный вектор совпадают в каждой точке линии, то линия, кривая является геодезической. В *искривлённом* пространстве параллельность отсутствует по определению, вернее, такого *корректного* определения не существует. Обычно рассматриваемая в подобных примерах касательная, *евклидова* прямая линия не принадлежит искривлённому двухмерному пространству, а имеет с ним только одну общую точку. Перенос *касательного* вектора производится не по искривлённой двухмерной поверхности, а в пространстве погружения E^3, в трёхмерном пространстве Евклида. Согласно разным описаниям, касательная всегда меняет направление в этом пространстве, то есть, определённо перенос не является параллельным. При действительно параллельном переносе вектора в *плоском* пространстве погружения по *любой* линии поворота и изменения вектора не происходит. В конечной точке искривлённого пространства после переноса *криволинейный* вектор меняет своё направление только при *эквиугловом* переносе и *только* по геодезической, по линии наименьшей длины, наикратчайшей.

"Геодезическая линия является аналогом прямой линии в евклидовом пространстве" [24, с.60].

Их аналогия заключается *только* в одном: это линии наименьшего расстояния.

"Геодезической линией называется кривая, направление которой во всех точках постоянно" [49, с.64].

Понятие направления само нуждается в корректном определении. Интуитивное представление о нём явно не соответствует представлению о геодезической, её опреде-

лению. Например, направление параллели на глобусе выглядит таким же постоянным, как и направление главной параллели – экватора.

"Как и в римановом случае, *геодезической* называется гладкая кривая... касательный вектор которой переносится вдоль этой кривой параллельно" [19, с.27].

"В искривленном пространстве мы можем рисовать линии, которые являются "как можно более прямыми", требуя параллельного переноса касательного вектора. Они называются *геодезическими"* [10, с.156].

"... понятия *прямой* (геодезической) *линии*. Прямой мы будем называть линию, направление которой не меняется, иначе говоря, касательная к которой при переходе от точки к точке вдоль кривой испытывает бесконечно малое параллельное смещение" [23, с.122].

Весьма спорные утверждения. Манипуляции с бесконечно малыми величинам требуют большой аккуратности. Конечное число бесконечно малых является бесконечно малой величиной, однако, не нулевой. Бесконечно большое количество бесконечно малых – величина неопределённая, то есть, может быть чем угодно. Возможно, в цитате под бесконечно малым смещением подразумевается его *отсутствие*, то есть, отсутствие, *нулевое* изменение направления. Иначе, что будет с *бесконечно* длинной прямой линией?

"Дуги окружности большого круга образуют "кратчайшие" пути (так называемые геодезические кривые) на поверхности сферы; эти дуги лежат в плоскостях, проходящих через центр сферы" [51, с.66].

Из этих цитат, рассмотренных выше, возражений не вызывает только последняя, где геодезическая отождествляется с кратчайшей линией. Таким образом, из приведённых определений непротиворечивой мы можем одно-

значно, безусловно, признать только одну характеристику геодезической: это наикратчайшая линия между двумя точками на искривлённой поверхности. Называть её прямой неверно. Компромиссное название "наипрямейшая" линия можно применять условно, всегда помня, что по большому счёту, в реальности эта линия, геодезическая не является прямой. Визуально такая "наипрямейшая" линия, геодезическая в искривлённых пространствах оказывается линией кривой. Визуальность означает "взгляд" из пространства большей размерности, чем рассматриваемое, то есть, из пространства погружения, в данном случае трёхмерного пространства Евклида E^3. В этой связи заметим также, что пятый постулат Евклида является прямым *следствием* трёх предыдущих, без четвёртого, являющегося, как считается, следствием первых трёх. Производность пятого постулата означает, что нарушение, например, третьего постулата делает его недействующим. Собственные пятые постулаты в искривлённых пространствах отрицательной или положительной кривизны ни в каком смысле не эквивалентны пятому постулату Евклида, поскольку в этих пространствах нарушается, отсутствует третий постулат. Отсутствие этого важного третьего постулата и делает возможными (эквивалентные) формулировки об отсутствии или множестве *аналогов* прямых, проходящих через внешнюю точку и параллельных заданной. Отметим, что даже при явном и признаваемом всеми отсутствии параллельности, термин этот всё-таки используется как описание реального взаимного расположения линий:

"Две геодезические, первоначально параллельные и отстоящие друг от друга на ... ("отклонение геодезических"), на некотором удалении s уже не будут параллельными" [42, т.1, с.63].

Однако такая "первоначальная параллельность" является противоречием. Поскольку любой прямолинейный отрезок на сфере – это кривая линия, называть их параллельными нельзя. Фактически параллельными кривыми линиями могут быть лишь отрезки нулевой длины, *точки,* например, на экваторе. Например, в "Притче о двух путешественниках" описывает движение двух путешественников А и В от экватора на северный полюс. Изначально они находятся вдоль экватора на некотором удалении друг от друга. Далее,

"... начав двигаться параллельно друг другу и не отклоняясь ни влево, ни вправо, обнаруживают тем не менее, что приближаются друг к другу, пройдя некоторое расстояние. " [61, с.239].

Здесь вновь упоминается то самое неясное "некоторое расстояние", на котором становится заметным нарушение параллельности при движении. Ещё в одном примере путешественники имеют имена, часто используемые в иллюстрациях в квантовой механике:

"... предположим, что ... есть два человека, идущих от экватора к северному полюсу, Алиса и Боб. Как видите, Алиса и Боб движутся навстречу друг другу" [8, с.196].

Здесь явно не указано, что в начале пути путешественники идут параллельными курсами, но факт их встречного движения свидетельствует об отсутствии параллельности. На приведённом к описанию рисунке показана соответствующая сфера и траектории путешественников. В следующей работе для демонстрации искривлённого пространства рассмотрен глобус и конкретный город на экваторе. Рассматриваются две геодезические от экватора до полюса:

"Переместимся теперь на восток от Кито на нашем глобусе на несколько сантиметров и построим новую

прямую линию (часть большого круга, геодезическую), которая на экваторе будет в точности параллельна проходящей через Кито. Так же, как и первая, эта линия пройдет через северный полюс. Причиной, которая заставляет изначально параллельные прямые пересекаться, является кривизна нашего глобуса" [62, с.105].

Как видим, здесь так же отмечено традиционное явление: пересечение "изначально" параллельных прямых. Похожая картина описывается с использованием двух грузовиков:

"Допустим, оба грузовика едут на север по соседним меридианам (а это геодезические линии). Оба они направляются на север и сначала движутся параллельно друг другу, но чем дальше на север они забираются, не отклоняясь от своих меридианов, тем ближе друг к другу оказываются. В конце концов они столкнутся на Северном полюсе" [60, с.329].

Вместо путешественников или грузовиков могут рассматриваться муравьи, ползущие по сфере "параллельно" от некоторого подразумеваемого экватора на соответствующий условный северный полюс:

"На поверхности сферы с положительной кривизной расстояние между муравьями уменьшается – то есть соседние геодезические сходятся" [7, с.14].

В этом же цитируемом источнике, приведены подобные траектории на плоской поверхности и на поверхности отрицательной кривизны.

Сущность параллельного переноса

Рассмотрим одно из описаний *сущности* параллельного переноса в следующей цитате, отмечая при этом, что она содержит подмену понятий. Разобьём цитату на фрагменты, приведя комментарии к каждому из них.

"Выведем теперь одно весьма существенное свойство параллельного перенесения векторов на поверхности, сближающее это перенесение с обычным" [54, с.370].

Отметим, что речь идёт о переносе векторов *по* искривлённой поверхности. Оставим пока без комментария формулировку "обычное перенесение", считая её неясной; "обычное" – это какое перенесение? перенесение на плоской поверхности?

"А именно, если в начальной точке $t = 0$ задать не один вектор a_0, а рассмотреть всевозможные касательные к поверхности векторы и подвергнуть их затем все параллельному перенесению вдоль кривой на поверхности, то длины этих векторов и углы между ними сохраняются без изменения" [продолжение цитаты].

Очевидно, во-первых, все эти векторы переносятся независимо друг от друга; во-вторых, ни один из векторов не принадлежит поверхности переноса, имеет с нею только одну общую точку, поскольку находится в *касательной* плоскости. По сути, каждый вектор переносится параллельно самому себе в *пространстве погружения*, в данном случае, в пространстве Евклида E^3. Сразу же заметим как очевидное: такой перенос в плоском пространстве, действительно, никак не меняет векторы.

"Другими словами, если представлять себе, что касательная плоскость к поверхности в начальной точке $t = 0$ образована всевозможными векторами, касательными к поверхности в этой точке, то ..." [продолжение цитаты].

Да, это очевидно. В любой точке искривлённой поверхности без излома возможна только одна касательная плоскость, следовательно, все касательные векторы в этой точке обязательно лежат в этой касательной плоскости в этой же точке:

"... при параллельном перенесении этих векторов касательная плоскость перемещается как твердое тело" [продолжение цитаты].

Напомним, что перенос векторов происходит в плоском трёхмерном E^3 пространстве погружения Евклида, что явно видно в описании процесса, поэтому линия переноса не оказывает никакого влияния на взаимное расположение векторов. Линия может и не принадлежать какой-либо заранее заданной двухмерной поверхности и может иметь любую самую замысловатую, *трёхмерную* форму. При этом перенос в *трёхмерном* пространстве погружения в общем случае также не является параллельным.

"... совпадая последовательно с касательными плоскостями во всех точках пути перенесения" [окончание цитаты].

Все описанные векторы всегда имеют общую точку своих начал и по определению лежат в одной плоскости – касательной. Понятно, что эта плоскость всегда может быть к чему-либо касательной этой общей точкой векторов; она может быть касательной к любой кривой или поверхности. Сразу же следует вывод, что описанный процесс *ничего* не проясняет в процессе переноса по искривлённой поверхности векторов, лежащих на ней и *принадлежащих* этой поверхности. Подмену понятий мы видим в том, что описан процесс переноса *касательных* векторов в плоском, трёхмерном E^3 пространстве погружения Евклида; однако заявлено выведение свойства переноса *на двухмерной поверхности*, хотя и отмечается различие переноса векторов, лежащих на *искривлённой* поверхности, от переноса векторов, лежащих на *плоскости*.

Итак, можно сказать, что сущность параллельного переноса вектора многими исследователями сводится к его переносу вместе с касательной плоскостью, находящейся в

трёхмерном евклидовом пространстве погружения E^3. При этом многие авторы изображают вектор вообще выходящим за пределы пространства, в котором он якобы перемещается, либо изображают его прямой линией, что не соответствует его кривизне в этом пространстве. При этом такие "параллельные" линии имеют важную особенность: параллельные заданной, они не параллельны друг другу.

Кроме того следует указать на пренебрежение малыми величинами. Манипуляции с бесконечно малыми величинами используют многие авторы. Однако большое количество малых величин в некоторых случаях имеет вполне весомое, конечное значение.

"Исходя из произвольной точки М, проделаем параллельное обнесение вектора по замкнутому пути с возвращением в прежнюю точку М. В случае абсолютного параллелизма мы возвращаемся в точку М с прежним значением вектора. (Действительно, перенесение от пути в этом случае не зависит, так что результат обнесения по замкнутому контуру будет таким же, как и тогда, когда весь этот контур стянут в одну точку М и когда, следовательно, переносимый вектор просто остается на месте.)" " [55, с.519].

Термин "абсолютного параллелизма" относительно редкий, но довольно звучный. Известно сравнение пространства абсолютного параллелизма с кристаллической решеткой. В этом случае можно рассматривать его как аналогию параллелизма по Евклиду, то есть, как описание параллельных линий в плоском пространстве.

Уклонение же параллельно обнесенного вектора от прежнего значения будет связано, таким образом, с нарушением абсолютного параллелизма. Это уклонение мы и будем рассматривать и покажем, что для бесконечно ма-

лого контура оно (в своей главной части) характеризуется тензором кривизны в точке M" [там же].

Довольно странная формулировка: нарушение абсолютного параллелизма. Выглядит так: только что параллелизм был абсолютным, и вдруг он нарушился.

"Чем больше отличаются координаты тензора кривизны от нулевых значений, тем резче отклоняется параллельно обнесенный вектор ... от первоначального вектора ... при прочих равных условиях. В этом смысле тензор кривизны характеризует в геометрии данного L_n степень нарушения абсолютного параллелизма" [55, с.530].

Мы понимает это так: чем сильнее искривлена поверхность, тем больше изменение направления вектора. В этом случае степень нарушение абсолютного параллелизма следует, видимо, трактовать так же: это степень искривлённости поверхности. Но главная подмена понятий всё-таки по-прежнему в использовании термина "параллельный перенос" в отношении искривлённого пространства. В пространстве с "нарушенным абсолютным параллелизмом" не существует параллельных линий. Пространство с "не абсолютным параллелизмом" – это пространство без параллелизма.

Использование термина параллельного переноса

Перемещение по контуру

Несмотря на отсутствие в принципе каких-либо параллельных линий на искривлённых поверхностях, формулировка "параллельный перенос вектора" используется повсеместно. Можно отметить три группы таких описаний переноса в литературе:

a) по замкнутому контуру, с возвратом переносимого вектора в исходную точку;

b) по разным траекториям из одной точки в другую;

с) перенос как таковой, включая бесконечно малый, и по произвольной траектории, нередко не являющейся геодезической.

Наиболее наглядным примером параллельного переноса можно назвать перенос по замкнутой траектории, по замкнутому контуру.

"... параллельный перенос произвольного вектора (тензора) по замкнутому контуру ..."К тензору кривизны ... можно прийти ... рассматривая параллельный перенос произвольного вектора (тензора) по замкнутому контуру" [25, с.67].

В более широкой трактовке – перенос не только вектора, но и тензорных величин в общем смысле:

"... ковариантную производную можно определить через операцию параллельного переноса тензорных величин в искривленном пространстве-времени" [25, с.48].

Кривизна поверхности как таковая, ранее, как правило, хорошо представимая именно в таком обозначении, не требующая большого воображения, в приведённой трактовке определяется через понятие тензора кривизны, для оперирования которым, следует отметить, необходима специальная подготовка.

"Другой путь введения тензора кривизны основан на рассмотрении операции параллельного переноса смещений (или тензоров) по замкнутому контуру" [25, с.49].

Многие авторы для демонстрации кривизны поверхности, двухмерного пространства используют параллельный перенос вектора точно так же, не усложняя описание указанием на то, что это двухмерный тензор первого ранга.

"Параллельное смещение по замкнутой кривой в искривленном пространстве" [6, с.23].

Цитата является подписью к рисунку, который, следует отметить, сам по себе на самом деле ни в каком смысле

нельзя признать доказательным: это весьма условная иллюстрация. Искажение вектора, его вращение при параллельном переносе выводится аналитически, а рисунок лишь крайне схематично, неубедительно показывает, как выглядит это искажение вектора.

Следующая работа хотя и содержит иллюстрации, но мы её рассматриваем всё-таки как аналитическое описание процесса параллельного переноса, поскольку иллюстрации не содержат никаких доказательных элементов. Отметим, что в самой цитируемой работе даётся весьма обстоятельное описание сути параллельного переноса:

"... рассмотрим параллельный перенос вектора вдоль замкнутой кривой. Для пояснения выкладок вначале выберем двумерную поверхность сферы" [57, с.102].

Важно: в контексте можно увидеть неявное утверждение, что переносимый вектор лежит строго в "плоскости" поверхности, на двухмерной поверхности, по которой переносится, не "выглядывает" за поверхность сферы.

В следующей цитате мы обратим внимание на важное замечание, хотя смысл его пока раскрыт недостаточно: это состав контура из трёх геодезических.

"... в искривленном пространстве при параллельном переносе вектора вдоль замкнутого контура ... начальное и конечное направление вектора не совпадают... Параллельный перенос вектора А по замкнутому контуру (который в этом примере состоит из трех геодезических). В искривленном пространстве начальное и конечное направление вектора не совпадают" [18, с.54-55].

Уточним: мы во многих случаях пишем без кавычек слова "параллельный перенос", относящийся к искривлённому пространству. Тем не менее, всегда следует помнить, что мы не считаем такой "перенос" параллельным на самом деле.

В качестве наглядной демонстрации изменения направления вектора при параллельном переносе обычно приводится перенос вектора на поверхности сферы. В этом случае роль прямой играют дуги больших кругов сферы, получаемые сечением сферы плоскостью, проходящей через её центр. Во всех таких примерах наглядно демонстрируется, что при параллельном переносе вектора по поверхности сферы в исходную точку его направление не совпадает с направлением исходного вектора.

Рассмотрим более детально один из таких примеров очерчивания контура при параллельном переносе вектора на поверхности сферы, ожидая, что в нем никаких неясностей, неопределенностей нет.

"На рисунке начальное положение вектора обозначено цифрой 1 (северный полюс). Он обносится параллельным образом ... вокруг сферического треугольника, все углы которого равны 90°. По возвращении в исходную точку вектор ... оказывается повернутым на 90°" [42, т.1, с.412].

Рисунок мы не приводим, поскольку нас интересует сейчас главным образом терминология, использование фразы "параллельный перенос". Как видим в цитате, и в этом случае при обходе по замкнутому контуру результирующий вектор традиционно не совпал по направлению с исходным. Далее, в следующей цитате укажем на то, что вновь рассматривается вектор, не принадлежащий поверхности сферы:

"Один из интуитивно понятных способов визуализировать это – рассмотреть перенос геометрического вектора на двумерной сфере, встроенной в трехмерное пространство ... В качестве вектора мы берем касательный вектор к сфере. Рассмотрите возможность переноса вектора по пути на поверхности сферы, обозначенной пунктирной линией,

начиная и заканчивая на северном полюсе, сохраняя вектор касательным к поверхности и не вращая его. Это называется параллельным переносом вектора" [5, с.13].

Утверждение: "касательный вектор к сфере" – некорректное в плане демонстрации параллельного переноса по поверхности сферы. Такой вектор по определению не принадлежит двухмерному искривлённому пространству, поверхности сферы. Фактически этот вектор переносится не по поверхности сферы, не в её пространстве, а в пространстве погружения – трёхмерном E^3 пространстве Евклида. Сразу же совершается главное нарушение правила "параллельного" переноса. Утверждается, что вектор "не вращается", но на самом деле

"Из рисунка видно, что вектор после однократного завершения цикла не указывает в том же направлении, что и изначально. Параллельная транспортировка вектора из одной точки в другую на сфере, как правило, будет зависеть от пройденного пути" [5, с.13].

Это однозначно указывает на то, что вектор повернулся именно в пространстве Евклида, то есть, никакого параллельного перемещения на самом деле не было. Присвоенное процессу название "параллельного переноса вектора" неверно. На самом деле, правильно – это брать касательный вектор к линии переноса. Но в этом случае вектора по определению должен совпасть с геодезической линией переноса, то есть, быть отрезком большого круга.

"Кроме того, параллельная транспортировка по замкнутому контуру будет эффективно вращать вектор на некоторый угол. Это неотъемлемая черта искривленных пространств" [5, с.13].

Вновь неверно. Поворот касательного к геодезической вектора исчезает автоматически. В исходной точке траектории существует *единственная* касательная, неза-

висимо от того, откуда она "пришла". Поворот возникнет только в том случае, если в точке излома, перехода с одного геодезического участка траектории на другой мы *принудительно* изменяем угол между вектором и траекторией. Пришёл он к этой точке касательным к предыдущему участку, а ушёл уже под углом к следующему участку траектории. Эта точка – единственная, в которой вектор был "перемещён" параллельно самому себе. На самом деле он не сдвинулся с места, просто его формально в точке излома "прикрепили" к следующему участку.

"Ясно, что трехмерное встраиваемое пространство – это просто инструмент для нас, чтобы визуализировать сферу, и нет необходимости выполнять параллельный перенос и приходить к тем же выводам" [5, с.13].

Признаемся, что смысл утверждения нам не ясен. Кроме того под "трехмерным встраиваемым пространством", вероятно, подразумевается традиционное понятие "пространства погружения".

Далее приводим несколько цитат, некоторые без комментариев, чтобы просто показать использование фразы "параллельный перенос вектора" в искривлённом пространстве:

"На рисунке ... показан результат параллельной транспортировки вектора по замкнутому треугольнику" [7, с.33].

"Будем параллельно переносить вектор вдоль замкнутой кривой ..., пока не вернемся в исходную точку. При этом перенесенный вектор либо будет совпадать с исходным, либо будет от него отличаться" [17, с.218].

Это верное замечание: вращение может быть (составная геодезическая), а может и отсутствовать.

"В искривленном пространстве параллельный перенос но замкнутому пути, вообще говоря, не дает вновь ис-

ходного вектора. Например, рассмотрим поверхность сферы ..., на которой из геодезических кривых построен сферический треугольник" [22, с.54].

Отметим важную деталь в цитате: здесь чётко указано, что треугольная траектория переноса "собрана" из геодезических.

"Возьмем в точке А бесконечно малый вектор *a*, совпадающий по направлению с направлением дуги АВ (прямой); переместим параллельно этот вектор по сомкнутой линии, образующей треугольник АВС; в точку А наш вектор вернется в виде вектора *a*' с уже изменившимся направлением" [65, с.42].

"... в кривом пространстве параллельный перенос вектора из одной заданной точки в другую дает разные результаты, если он совершается по разным путям. ... если переносить вектор параллельно самому себе по некоторому замкнутому контуру, то он, возвратившись в первоначальную точку, не совпадет с самим собой" [39, с.349].

"Обобщенное определение кривизны многомерной поверхности будет даваться через изменение вектора при его переносе вдоль замкнутой кривой, причем при таком переносе, который оставляет вектор параллельным самому себе" [64, с.193].

"Когда вектор, параллельно перемещаясь из точки ... по замкнутой кривой ..., вернулся ... в ту же точку, то величина его, вообще говоря, изменится" [65, с.44].

"... любой вектор ..., будучи параллельно перенесенным по замкнутой кривой, должен по возвращении в исходную точку принять свое первоначальное значение. Вообще же это может и не иметь места" [28, с.93].

Перенос вектора по замкнутому пути в искривлённом пространстве всеми цитированными авторами рассматривается как *параллельный*, но в искривлённом пространстве

это невозможно, в нём отсутствуют параллельные линии. Делается вывод, что вернувшийся в исходную точку вектор имеет иное направление, нежели первичный, переносимый.

Перемещение зависит от пути

Вариант переноса вектора из одной точки в другую, не совпадающую с исходной, призван показать, что в конечной точке векторы, пришедшие разными путями, не совпадают. Например, в работе [2, с.248] приводится рисунок, который в том или ином варианте воспроизводится во многих других работах, и который можно назвать традиционным и даже классическим вариантом иллюстрации:

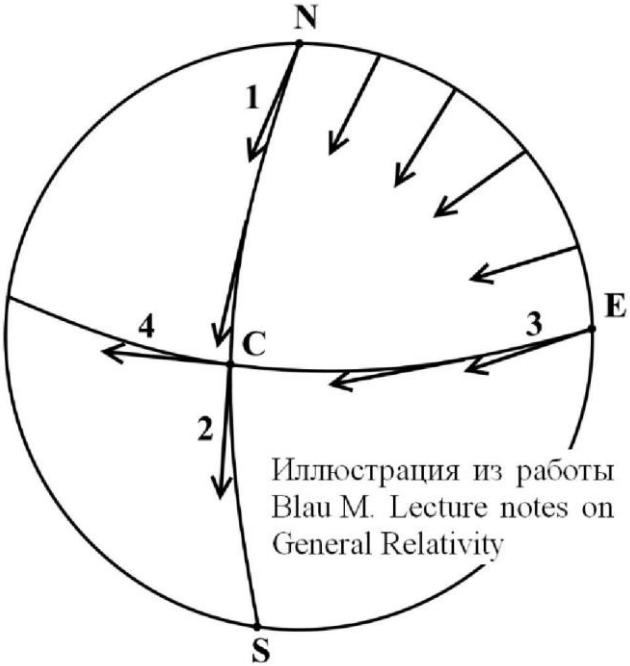


Рис.1.1. Рисунок, иллюстрирующий зависимость параллельного переноса от траектории в искривленном пространстве [2, с.248]

Согласно описанию к рисунку, исходный вектор 1 из начальной точки N перемещается в конечную точку C по двум различным траекториям на сфере. При движении "напрямую" по траектории NC вектор 1 преобразуется в вектор 2. При движении в качестве альтернативы по траектории NEC он преобразуется в вектор 4. Как видно на рисунке векторы 2 и 4 различны. Традиционно считается, что угол между ними отражает кривизну пространства, поверхности сферы.

Отмечается, что движение вектора происходило по геодезическим, большим кругам сферы. Это удобно, поскольку при таком переносе вектора легко обеспечить сохранность его длины и угла между ним и геодезической, который всегда остаётся неизменным.

Следует отметить, что в данном случае векторы можно и нужно рассматривать как *принадлежащие* сферическому пространству, полностью лежащими на поверхности сферы. Однако всё-таки внесём некоторые уточнения. Если вектор начался на некоторой прямой линии, вообще-то геодезической, совпав с нею, то, вектор *должен* совпадать, сливаться с этой прямой линией на всём протяжении. Любой вектор на сферической поверхности должен изображаться *визуально* кривым отрезком, дугой, линией, предельно близкой к дуге большого круга, на которой находится любая из его точек, например, начальная. То, что векторы 1 – 4 на рисунке визуально выглядят прямыми линиями можно считать условностью, допустимой графической погрешностью. Основная мысль автора изложена вполне корректно.

"Параллельно перенося произвольный тензор … из произвольной точки A в точку D вдоль различных сторон параллелограмма … можно убедиться в том, что тензор Римана-Кристоффеля определяет разность компонент

тензоров, перенесенных из одной точки в другую (близкую) двумя разными путями (уравнение) ..." [25, с.67].

Просто отметим, что в данном случае та же, можно сказать, тривиальная мысль о разных путях переноса вектора, трактуется в тензорных терминах. Очевидно, это более общий случай "параллельного" переноса. Заметим, что неявно такая трактовка "бросает тень" на этот тензорный формализм. Параллельный перенос в искривлённом пространстве принципиально невозможен. Доказательство такого переноса можно рассматривать как признак несостоятельности использованного для этого доказательства формализма, либо некорректности его использования.

"Решение системы уравнений ... с начальным условием ... называется *параллельным переносом* вектора ... из точки p в точку x(t) вдоль кривой γ. ... результат параллельного переноса вектора из точки p в точку q в общем случае зависит от кривой γ, соединяющей эти точки" [35, с.37].

Собственно говоря, в данном случае мы просто полагаем, что геометрически исследуемый здесь параллельный перенос вектора в искривлённом пространстве выглядит именно так, как он изображается графически во множестве других работ. Главное в цитате – это полученный строго аналитически вывод о том, что при параллельном переносе результат зависит от пути, что полностью соответствует традиционному понятию пространства искривлённого.

В следующей цитате мы вновь отметим важность для аналитических выкладок приходить к тем же выводам, что и геометрические, графические построения

"... рассматривался все время параллельный перенос вектора вдоль заданной кривой, а не простой перенос вектора из точки P в точку P'. Последний же только в евкли-

довой геометрии не зависит от пути. Если же в общем случае перенести вектор ... вдоль замкнутой кривой в начальную точку, то перенесенный вектор ... будет отличен от начального вектора ..." [49, с.67].

Здесь вывод имеет явную "лазейку": отличие перенесённого вектора от начального будет только в общем случае. Это, очевидно, позволяет отнести любые возражения по параллельному переносу к случаю частному, исключению. К этому частному случаю, следовательно, относятся все возражения по искажениям, изменениям векторов при параллельных переносах по сфере. В том числе и по замкнутой кривой:

"Аналогично можно получить изменение ковариантных компонент вектора при параллельном переносе вектора вдоль замкнутой кривой" [49, с.68].

Следует заметить, что выше озвученные наши возражения относятся не только к сфере, но и к некоторым другим криволинейным поверхностям, на которых при переносе вектора по любому пути результат, состояние вектора остаётся неизменным:

"В общем случае результат параллельного переноса вектора существенно зависит от пути, по которому он выполняется. Этого не будет, только если компоненты вектора могут быть определены не только как функции s, но и как функции координат x^k..." [49, с.75].

Специфическую особенность переноса вектора Carroll формулирует следующим образом:

"Решающее различие между плоскими и искривлёнными пространствами состоит в том, *что в искривленном пространстве результат параллельного переноса вектора из одной точки в другую будет зависеть от пути, пройденного между точками"* [4, с.64], [3, с.104].

Для визуальной демонстрации явления используется перемещение по двум разным путям на поверхности сферы. Сам рисунок мы не приводим, а процитируем только описание к нему:

"Начните с вектора на экваторе, направленного вдоль линии постоянной долготы. Параллельно перенесите его до северного полюса по долготе очевидным способом. Затем возьмите исходный вектор, перенесите его параллельно экватору на угол θ, а затем переместите его вверх к северному полюсу, как и раньше. Ясно, что вектор, параллельно перемещённый по двум путям, прибыл в один и тот же пункт назначения с двумя разными значениями (повернутыми на угол θ)" [4, с.64], [3, с.104].

Делается заключение, что два *параллельных* в начальной точке вектора прибыли в конечную точку повёрнутыми относительно друг друга. Однако это ошибочная ясность. Невозможно объяснить, почему на экваторе векторы параллельны, а после их приближения к полюсу вектора вдруг неожиданно "разбежались", "перенацелились" в разные стороны, причём на довольно большой угол. В какой момент, на каком удалении от экватора произошло это "распараллеливание" векторов? Наш ответ прост: вектора *никогда* не были параллельны, на поверхности сферы понятие "параллельности" не существует. Следовательно, никакого параллельного переноса также быть не может.

Также вновь отметим, что вектора на рисунке в цитате изображены неточно. Они, во-первых, не могут быть *прямолинейными* отрезками на поверхности сферы, они на всём пути к полюсу должны совпадать с соответствующими линиями долготы. Во-вторых, они не могут выходить за поверхность сферы, как изображено на рисунке. Но сделаем скидку на это, считая, что это вполне допустимое демонстрационное упрощение.

Следующие две цитаты приводим, как и ранее, в качестве иллюстрации использования понятия "параллельного переноса", которое, как мы утверждаем, к искривлённым пространствам неприменимо:

"Параллельный перенос вектора v вдоль пяти различных кривых (все они являются большими окружностями). ... Зависимость параллельного переноса от траектории движения. Показаны два различных пути от точки p к точке q, один из которых следует прямо по дуге большой окружности, а другой состоит из пары дуг больших окружностей, пересекающихся в некоторой промежуточной точке r" [51, с.263].

"... на искривленной поверхности параллельный перенос вектора зависит от пути" [15, с.209].

Произвольный путь переноса

Некоторые авторы явно не указывают на характер линии, траектории переноса. Это, видимо, может быть как замкнутая траектория, так и различные пути переноса. Сама траектория также не обозначается как геодезическая.

"Говорят, что вектор ... (тензор ...) переносится параллельно самому себе вдоль некоторого пути, если при переносе его абсолютное (истинное) приращение равно ... При произвольном переносе … вектор получает приращение ... Поскольку векторы ... переносятся параллельно самим себе, то согласно определению параллельного переноса их абсолютное приращение ... равны нулю" [32, с.51].

"Перенос вектора (тензора), при котором его компоненты в галилеевых координатах остаются неизменными, называется параллельным переносом" [32, с.48].

Приведённые утверждения в цитируемом тексте следуют буквально друг за другом, поэтому считать их выдернутыми из контекста вряд ли разумно. По содержанию

их явно можно назвать двусмысленным. Во-первых, неясно, что подразумевается под "произвольным переносом". Строго говоря, рассматриваемый нами параллельный перенос определённо не является *произвольным*: линия переноса *обязательно* должна быть геодезической. Это очень важное и строгое ограничение. В случае "произвольного переноса" вектор может изменить своё направление и при перемещении на плоскости. Во-вторых, под приростом при перемещении *всегда* подразумевается изменение направления вектора. Нередко подчёркивается, что пространства, в которых вектор изменяет свою длину, под эту модель переноса не подводятся (геометрия Вейля). Кончено, с математической точки зрения допустимо поворот вектора рассматривать, как его приращение, но всё-таки желательно уточнять, что модуль, длина вектора в рассматриваемых моделях как бы параллельного переноса *всегда* остаётся неизменным. Вместе с тем, заметим важную мысль в цитате: параллельным перемещением как противопоставление произвольному переносу следует называть только такое, при котором *отсутствует* приращение вектора.

"Рассмотрим некоторую поверхность и на ней геодезический треугольник, т.е. треугольник, сторонами которого являются отрезки геодезических линий. Далее возьмем некоторый вектор ..., определенный в одной из точек стороны ..., образующий в этой точке со стороной ... угол ... и касающийся нашей поверхности. Будем переносить вектор ... параллельно самому себе вдоль сторон треугольника ..." [32, с.76].

Отметим частичную корректность описания. Замкнутая траектория явно обозначена как набор геодезических. Но вновь сделано неверное утверждение: вектор *касательный*, то есть находится в пространстве погружения, следовательно, и его перенос производится в этом про-

странстве. Это пространство Евклида, поэтому при параллельном переносе вектор однозначно сохранит своё направление, по какой бы траектории не перемещалась его начальная точка. Если же уточнить, что поверхности сферы касается не вектор, а плоскость, то перемещение вектора с такой плоскостью в принципе может быть параллельным лишь в особых случаях – движения вдоль большого круга. Кроме диаметральных, все касательные плоскости к сфере не параллельны друг другу.

Все цитируемые выводы относятся к *криволинейным* пространствам, поскольку в декартовой системе координат пространства Евклида компоненты векторов при параллельном переносе не изменяются, и результирующий вектор после прохождения любого замкнутого контура совпадет с исходным вектором, причем в общем случае, как считается, искривленной, вернее, деформированной может быть и сама *система координат* (например, диаграммы Пенроуза). Но в искривленном пространстве, как указано в следующей цитате:

"... с помощью параллельного переноса вдоль геодезической получаются различные векторы U^i. ... если данный вектор переносить параллельно из точки P_1 в точку P_2 вдоль некоторой кривой, соединяющей эти две точки, то результирующий вектор a^{*i} зависит от формы этой линии, если пространство искривленное" [41, с.231].

Вновь заметим некоторую двусмысленность формулировок в цитате: "некоторой кривой... формы этой линии". Если линия – геодезическая, то в этом пространстве она – единственная, наикратчайшая и форма её – единственная. Форма всей линии между точками может быть разной только если эта линия – составная, состоит из нескольких геодезических.

Перефразируя цитату кратко, можно сказать, что при перемещении вектора по замкнутой составной линии в искривлённом пространстве он изменяется. Подчеркнём: *составной*, поскольку по неразрывной геодезической вектор вернётся с неизменным направлением.

Такое "вращательное" поведение вектора при параллельном переносе, как правило, и используется в качестве определения кривизны пространства:

"Пространство (или многообразие) называется искривленным, если в нем невозможно ввести координатную систему, которая может считаться прямолинейной. ... Координатная система будет прямолинейной, если ее оси ... во всем пространстве представляют собой прямые линии; в этом случае две определенные оси ... в любой точке пространства пересекаются под одним и тем уже углом" [16, с.60].

Да, это верно. Кстати, отметим неточность:

"Меридианы и параллели на Земле как раз и являются большими кругами..." [16, с.60].

На карте Земли (глобусе), как это ни странно звучит, только на экваторе параллельными *формально,* на самом деле считаются меридианы, а не параллели, несмотря на название, которые являются не большими кругами, а просто кривыми линиями.

"Представление о параллельном переносе позволяет уяснить специфические свойства искривленного пространства. Если взять две точки в пространстве и вектор в одной из них, то можно построить вектор во второй точке, который параллелен вектору, заданному в первой точке" [16, с.62].

Повторим, что это определённо выглядит противоречиво, когда речь идёт об искривлённом пространстве. Как построить параллельный вектор в пространстве, в ис-

кривлённом пространстве, в котором по определению параллельные линии невозможны?

"... проведем через рассматриваемые точки геодезическую линию и совершим перенос исходного вектора вдоль геодезической линии, принимая во внимание, что угол между прямой линией и вектором при параллельном переносе остается постоянным, что вектор не поворачивается вдоль прямолинейного пути, а только скользит вдоль него и, наконец, что при параллельном переносе длина вектора не меняется" [16, с.62].

Заметим вновь, параллельный перенос как таковой невозможен, поэтому остаётся только то, что "принято во внимание": эквиугловой перенос, перенос с сохранением угла. И вновь отметим неточность в цитате. При описанном "параллельном переносе" вектор неизбежно *вращается* в "сферической плоскости многообразия" по отношению к любой другой "прямой" на сфере. Собственно, это и приводит к изменению его направления, поскольку это вращение фиксируется при переходе с одной "прямой", геодезической на другую.

"В точности такая же процедура может быть применена к параллельному переносу вектора вдоль замкнутого пути, образованного несколькими прямолинейными сегментами..." [16, с.62].

К месту заметим, что при переносе вектора по *замкнутой,* единой геодезической на сфере в исходную точку в общем случае он возвращается, совершив полный оборот вокруг оси, на 360 градусов. Понятно, что любой замкнутый путь в общем случае (не состоящий из единственной геодезической) возможен *только* с переходом с одного "прямолинейного сегмента" на другой. Автоматически это и приводит к *замалчиваемому* вращению вектора.

"... результат параллельного переноса вектора зависит не только от исходного вектора, но и от пути, по которому совершается перенос. ... Параллельный перенос вектора вдоль пути, состоящего из отрезков прямых (ломаная линия) ... приводит к новому вектору в начальной точке..." [16, с.62].

Это верно, но вновь возразим против использования термина "прямая" в искривлённом пространстве. Обратим внимание также на существенный признак: изменение вектора при перемещении по замкнутому пути происходит только в случае "ломаной" геодезической.

Ещё одна важная характеристика на многообразии обозначена как связность, обобщающая изменения при переносе касательного вектора:

"Кривизна, наглядное представление о которой дает искривленная поверхность, является характеристикой другой геометрической конструкции на многообразии – связности, которая обобщает на искривлённые пространства параллельный перенос в плоском пространстве. ... параллельный перенос в искривленном пространстве зависит от пути, по которому он осуществляется" [33, с.30].

Это очевидно: разных путей параллельного переноса вектора из одной точки в другую может быть сколько угодно. В плоском пространстве существует единственное *направление*, параллельное заданному в какой-то точке, поэтому результат переноса определяется только исходным вектором и не зависит от пути переноса, который может быть любым. Следующее описание процесса – безусловно, верное, но является описанием процесса, неверно названного параллельным переносом, хотя, заметим, возникло это описание буквально из ничего, без каких-либо логических обоснований.

"Тогда, обобщая параллельный перенос на плоскости, параллельный перенос касательного вектора на искривлённой поверхности можно описать как перенос вдоль наикратчайших так, что угол между вектором и наикратчайшей остаётся неизменным" [там же].

Действительно, никаких упоминаний о неизменности угла до этого момента не было, а перенос вдоль геодезических, наикратчайших акцентирован именно здесь, поскольку ранее путь переноса никак не привязывался к геодезическим – это был просто путь, линия переноса. Это важное и даже решающее *правильное* обстоятельство: перенос вектора *обязательно* должен производиться вдоль геодезической и *обязательно* с сохранением угла между вектором и этой геодезической. Называть такой перенос параллельным – неверно. Тем не менее, далее мы вновь видим упоминание переноса в искривленном пространстве как параллельного:

"На искривленной поверхности (в качестве примера будем рассматривать сферу) роль прямой играет наикратчайшая линия, соединяющая две точки. На сфере это дуга большого круга" [там же].

Эта линия – кривая и называемая не прямой, а геодезической.

"... параллельный перенос касательного вектора на искривлённой поверхности можно описать как перенос вдоль наикратчайших так, что угол между вектором и наикратчайшей остается неизменным ..." [там же].

Подчеркнём: наикратчайшая в искривлённом пространстве – это геодезическая *кривая* линия.

"Сам вектор, однако, при этом поворачивается, что особенно наглядно видно, если перенести его по замкнутому контуру, когда, в отличие от параллельного переноса

на плоскости ..., конечное направление ... вектора, ... не совпадает с начальным" [там же].

Добавим: в описанной ситуации геодезическая, замкнутый контур обязательно должен быть составным. Перемещение вдоль единой замкнутой геодезической, линии, не имеющей изломов, не приводит к повороту вектора. Напомним, что перенос по замкнутой *прямой* линии, имеющей излом, например, на поверхности конуса, так же приводит к повороту вектора.

"... при параллельном переносе вектора вдоль некоторой кривой в искривленном пространстве частные производные от этого вектора пропорциональны самому вектору" [21, с.54].

В цитате не указано, и не видно оснований полагать, что это подразумевается, что кривая переноса – геодезическая. Кроме того, из приведённых в данной цитате выводов явно не видно, совпал ли вектор, перенесённый по замкнутой кривой со своим исходным состоянием, цитата выглядит как констатация известных фактов с некоторой детализацией через производные. Кроме того, возникает резонный вопрос: а в *плоском* пространстве частные производные от вектора разве не пропорциональны точно так же самому вектору?

Главным недостатком приведённого варианта описания процедуры параллельного переноса вектора является *отсутствие* чёткого и однозначного утверждения о том, что в искривлённом пространстве при таком переносе, в частности, по замкнутой кривой вектор не сливается со своим исходным состоянием, направлением. Не видно констатации, что вернувшийся вектор – это, строго говоря, уже другой вектор.

Далее мы встречаем довольно редкую привязку поворота вектора и системы координат искривлённого про-

странства. В частности, это означает отсутствие параллельности даже между координатными линиями:

" ...в общих координатах компоненты тензора испытывают при параллельном переносе изменения, обусловленные различием координатных направлений в различных точках пространства. Пусть параллельный перенос тензора ... , заданного в точке ... , производится в точку ... . В таком случае в результате параллельного переноса компоненты принимают значения ... , приобретая приращения" [20, с.15].

Здесь мы видим достаточно чёткое указание на изменение компонент тензора, понимая под ним его частный, векторный вариант.

"С понятием параллельного переноса тесным образом связана операция ковариантного дифференцирования" [20, с.16].

Далее приводятся подтверждающие аналитические выкладки, проводящие параллель между понятием прироста компонент вектора между исходной и конечной точками и понятием ковариантной производной вектора.

Однако в этих выкладках что же, собственно, произошло с "параллельно" перенесённым вектором просматривается довольно завуалированно. Не видно явной констатации, совпадут ли две его копии, если будут перемещены в некоторую точку по *двум разным* путям или по замкнутой траектории.

В следующей цитате прямо не указывается, что базис описывает искривлённое пространство, а кривая является геодезической:

"Формула ... задает изменение компонент вектора в фиксированном базисе при его параллельном переносе вдоль кривой" [24, с.59].

В цитате прямо не указывается, что базис описывает искривлённое пространство, а кривая является геодезической. Однако из контекста раздела работы явно следует, что речь идёт всё-таки об искривлённом пространстве. В работе в достаточно общем, формальном виде приводятся определения понятий параллельного переноса вектора и понятия кривизны – тензора кривизны или тензора Римана. Отмечено, что задача о параллельном переносе и определении кривизны является корректной и имеет однозначное решение. О том, что в искривлённом пространстве параллельный перенос в принципе невозможен, ничего не говорится. Далее в цитате "стрелка" – это переносимый вектор:

"В плоском пространстве ... Стрелку можно переносить так, чтобы она всегда оставалась параллельной своему первоначальному направлению. Однако на изогнутой поверхности это невозможно. ... Все эти особенности будут присутствовать в любом пространстве (скажем, на поверхности одновременности) в искривленном пространстве-времени" [8, с.203].

Цитата является описанием серии весьма наглядных рисунков. Отметим явное утверждение, что на искривлённой поверхности невозможен параллельный перенос. Однако эта невозможность рассматривается в работе в широком, собирательном смысле. Параллельный перенос на некотором коротком участке считается возможным, правда под этим переносом подразумевается сохранение некоего направления, вектор переносят "сохраняя его всегда направленным в одном и том же направлении" [8, с.203].

Назовём это простой подменой понятий, названий: фактически "параллельный перенос" отождествляется с переносом с сохранением направления. В плоском пространстве эти понятия тождественны. На искривлённой поверхности сферы любое *неизменное* направление – это

направление на заранее выбранный *произвольный* полюс или вдоль геодезической переноса. Частный случай – перенос по экватору, когда неизменным направлением является направление на полюс или вдоль экватора. Но эти "неизменные" направления в пространстве погружения не являются неизменными. Вектор вращается.

"Экватор является геодезической ... при параллельном переносе касательный вектор к геодезической остается касательным вектором, поэтому при параллельном переносе вдоль экватора V становится таким же, как U, поэтому они параллельны по определению" [9, с.121].

Рассмотрены два альтернативных пути переноса: диаметрально вдоль экватора и в эту же конечную точку через полюс. На качественной иллюстрации видно, что векторы после переноса не совпали. Однако это верно лишь при отказе от точности терминологии. Во-первых, как мы уже неоднократно заявляли, ни тот, ни другой переносы *параллельными* не являются. В цитате переносится *касательный вектор*, который на поверхности сферы по определению является линией *кривой*. Параллельность кривых линий – понятие неопределённое, несмотря на заявленное "они параллельны по определению". Нет такого определения "параллельные кривые линии". Например, можно встретить определение, что "под параллельными кривыми линиями подразумеваются линии, получаемые одна из другой путем параллельного переноса". Но это определение понятия через само это понятие, то есть, фактически является тавтологией.

Отметим и отчасти согласимся с описанием в следующей цитате важного правила параллельного переноса, которое нарушается едва ли не в каждом его описании в разных источниках:

"... мы рисуем вектор так, как его видит двумерный муравей на сфере, поэтому он всегда должен касаться сферы" [10, с.154].

Укажем лишь на некоторую двусмысленность этого интересного утверждения. Если вектор касается сферы, а не линии на сфере, то такого вектора муравей не может увидеть по определению. Вектор полностью находится в пространстве погружения плоском или искривлённом, но относительно двухмерной поверхности он имеет третье измерение, принципиально недоступное для наблюдения двухмерным обитателям. Правильнее было сказать, что вектор полностью лежит на сфере и является касательным к некоторой линии на ней. Если линия – геодезическая, то этот касательный вектор *полностью* с ней сливается. Для внешнего наблюдателя и вектор и геодезическая видны как кривые линии, отрезки больших кругов сферы. Для муравья обе они – прямые линии.

"... на изогнутом многообразии просто невозможно определить глобально параллельные векторные поля. Мы все еще можем определить локальный параллелизм, например, как перемещение вектора из одной точки в другую, сохраняя его параллельным и одинаковой длины. Но результат такого "параллельного транспорта" из точки A в точку B зависит от пройденного пути. ... Если векторы V в бесконечно близких точках кривой параллельны и имеют одинаковую длину, то говорят, что векторы V переносятся параллельно по кривой" [10, с.155].

В общих чертах с этим можно согласиться. Но всегда следует помнить о тонкостях операций с бесконечно малыми величинами. Грубо говоря, при таких манипуляциях мы просто подменяем малый участок искривлённой поверхности на евклидову плоскость, неосознанно обозначая

её бесконечно большой. Цитата описывает именно такую ситуацию.

"Для аффинной связности параллельный перенос не зависит от пути тогда и только тогда, когда тензор кривизны равен нулю" [11, с.603].

Здесь упоминание параллельного переноса сделано в виде "инверсной" теоремы, доказывающей независимость результата параллельного переноса в плоском пространстве.

"... мы хотим развить внутреннее понятие кривизны, которое может быть применено к любому многообразию без ссылки на пространство более высоких измерений, в которое оно могло бы быть вложено. Такое понятие кривизны можно определить в терминах параллельного переноса" [11, с.603].

Это распространённое, можно даже сказать, классическое заблуждение, ошибка. В искривлённом пространстве понятие параллельного переноса является ложным понятием. Не существует определения понятия параллельных *кривых* линий.

"На такой поверхности, как плоскость ... или сфера ... , у нас есть интуитивное представление (которое будет математически точным ниже) того, что значит держать вектор "указывающим в одном направлении" (но всегда в касательном пространстве многообразия) при его перемещении по траектории" [12, с.29].

И вновь целый набор ошибочных утверждений как "интуитивных", так и "математически точных ниже". Понятие "одного направления" на искривлённой поверхности является негласным отождествлением с параллельностью, которой, как мы заявили, нет и быть не может на такой поверхности. Вектора в касательном пространстве многообразия, несомненно, могут иметь явно заданное направ-

ление, быть параллельными. Но эти векторы не лежат на искривлённой поверхности, не принадлежат ей, а имеют с нею одну-единственную общую точку. Такие "удерживаемые векторы" перемещаются исключительно в пространстве погружения, которое может быть как плоским, евклидовым, так и искривлённым трёхмерным пространством.

По искривлённой поверхности возможен только эквиугловой перенос вектора. Заметим, что такое определение кривизны "изнутри" фактически схоже с измерением суммы внутренних углов треугольника или даже "двухугольника".

Известны попытки определить таким способом кривизну нашего пространства: измерения углов треугольников показало в пределах доступной точности, что наше пространство – плоское.

"Пространство будет искривленным тогда и только тогда, когда некоторые изначально параллельные геодезические не смогут оставаться параллельными, то есть пятый постулат Евклида не сработает" [там же].

Более того: геодезические не только "не смогут оставаться параллельными", они вообще никогда и нигде параллельными не были. Естественно, пятый постулат, описывающий поведение параллельных линий, на искривлённой поверхности неприменим чисто терминологически.

"Учитывая только многообразную структуру пространства, у нас нет естественного понятия параллельного переноса" [там же].

Это верно, такого понятия, действительно нет, ни естественного, ни противоестественного.

"Причина в том, что касательное пространство Vp и Vq двух различных точек p и q являются разными вектор-

ными пространствами, и поэтому нельзя сказать, что вектор в p совпадает с вектором в q" [там же].

Поэтому указанная причина также лишена оснований. Естественного понятия параллельного переноса в искривлённом пространстве нет по причине отсутствия в таком пространстве параллельных линий, отсутствия самого понятия параллельности.

"... выводится уравнение отклонения геодезических, которое характеризует кривизну с точки зрения неспособности изначально параллельных геодезических оставаться параллельными" [12, с.30].

Эта точка зрения ошибочна. Не могут *оставаться* параллельными линии, которые не только изначально, а никогда *не были* и не могли быть параллельными.

Как мы уже не раз отмечали, в любых доступных литературных источниках, учебниках и статьях при рассмотрении искривлённых пространств делается вывод о том, что при параллельном переносе вектора он изменяет своё направление. В следующей работе, в работе Германа Вейля перенос вектора по поверхности сферы описан таким образом:

"На сфере радиуса *a* (в трехмерном евклидовом пространстве) большие круги являются геодезическими линиями. При движении по большому кругу изменение d**t** касательного вектора **t** единичной длины нормально самой касательной. Из равенства (**t** **t**) = 1 следует поэтому, что (**t** d**t**) = 0. Кроме того, d**t** лежит в плоскости, проходящей через центр сферы. Таким образом, t совпадает с направлением нормали к сфере, т.е. **t** испытывает при движении вдоль кривой параллельное перенесение на поверхности" [23, с.123].

Описание верно отчасти, если рассматривает его с точки зрения пространства погружения – евклидова про-

странства E^3. С точки зрения двухмерной поверхности сферы – все утверждения ошибочны. Вектор приращения d**t** нормален к поверхности сферы, то есть, он этой поверхности не принадлежит. Кроме того, поверхности не принадлежит и сам переносимый вектор, поскольку он лежит в касательной к поверхности плоскости. Заявлять, что вектор переносится на поверхности – неверно. У вектора с этой поверхностью лишь одна общая точка – начало вектора. Более того, ни в одной точке траектории этот нормальный вектор приращения не остаётся параллельным своему предыдущему состоянию. Иначе это тождественно утверждению, что все радиусы сферы – параллельны, что, конечно же, является нелепостью.

"Рассмотрим параллельный перенос касательного вектора ... из точки ... с координатами ... в точку ..." [27, с.426].

Как мы уже не раз отмечали, перенос *касательного* вектора не является переносом вектора по искривлённой поверхности. Это перенос вектора в пространстве погружения. Он может быть каким угодно: параллельным, эквиугловым, с поворотом или без поворота вектора. Касательный вектор к искривлённой поверхности этой поверхности не принадлежит.

"Параллельный перенос касательного вектора вдоль поверхности Σ осуществляется следующим образом ... сначала переносим вектор ... из точки у в точку ... как вектор в R^3 (...), а затем берем его проекцию на касательную плоскость в точке ..." [27, с.428].

Довольно неплохая детализация процесса, но, к сожалению, имеющая очевидные противоречия. Первый описываемый перенос в R^3 – это перенос *касательного* вектора. Явно не указан характер переноса, можно лишь предположить, что вектор в R^3 перенесён параллельно.

Сразу же возникает вопрос: почему *касательный* к искривлённой поверхности вектор не лежит в *касательной* к ней же плоскости? Насколько нам известно, все вектора, касательные к искривлённой поверхности в некоторой точке лежат в одной плоскости – касательной к этой поверхности в этой же точке. В таком случае описанная проекция касательного вектора на касательную плоскость равна самому вектору. Неясно, в чём смысл процедуры.

"При параллельном переносе в плоском пространстве сохраняется направление вектора. В частности, сохраняются углы, образуемые вектором с прямой (т.е. геодезической), соединяющей исходную и конечную точки переноса" [31, с.110].

Заметим, что обозначение, именование *прямой*, прямой евклидовой линии как *геодезической*, очевидно, приводит к возникновению множества ошибок при описании параллельных переносов. Поскольку прямая – это геодезическая, то многие авторы, видимо, полагают и обратное: геодезическая – это прямая. Но есть и другое существенное отличие: в плоском пространстве параллельный перенос вдоль *прямой* линии, что тождественно переносу с сохранением направления, возможен по определению и он эквивалентен эквиугловому переносу вдоль прямых линий. В искривлённом пространстве нет ни понятия параллельности, ни переноса с сохранением направления, поэтому и параллельного переноса быть не может, а возможен *только* эквиугловой.

"При обходе замкнутого контура положение вектора совпадает с исходным. В искривленном пространстве это не так. Легче всего это понять на примере сферы ..." [31, с.110].

Это верно лишь отчасти. Если замкнутый контур образован единственной геодезической, то поворота вектора

не будет. В общем случае, если геодезическая составная, в искривлённом пространстве вектор не совпадает с исходным.

"Выйдем из полюса с вектором, направленным по меридиану. Дойдем до экватора и перенесем вектор параллельно самому себе вдоль экватора, после чего вернемся по другому меридиану на полюс" [31, с.110].

В искривлённом пространстве отсутствуют понятия *параллельного* переноса и переноса с *сохранением* направления. Сравнивать принципиально *разные, различающиеся* переносы: параллельный перенос в плоском пространстве с эквиугловым переносом в искривлённом следует с чёткими оговорками. В обоих случаях следует указать, что перенос именно эквиугловой, не используя понятия параллельности или неизменности направления. Кроме того, линия переноса в плоском пространстве – это *прямая* евклидова линия, а в искривлённом – линия *кривая*, геодезическая. Обе линии – наикратчайшие между точками. Всё сказанное относится и к высказыванию следующего автора:

"Единичный вектор, касательный к геодезической, претерпевает параллельный перенос" [59, с.20].

Единичный и любой иной вектор, касательный к геодезической всегда сливается с нею. Мы говорим – геодезическая, поскольку речь идёт об искривлённом пространстве. Перенос такого вектора даже более, чем эквиугловой, он, скорее, конгруэнтный, но никак не параллельный. В искривлённом пространстве нет такого понятия – параллельность.

2. Произвольная траектория в роли геодезической

Как видно, в некоторых из приведённых цитатах перенос векторов производится по *неопределённой* траектории, пути, без упоминания, что траектория является гео-

дезической. Насколько это важно? Зависит ли поведение переносимого вектора от характера траектории? Для того чтобы внести определённость в этот процесс:

"... полезно рассмотреть ... внутреннюю геометрию обычной двумерной сферы S^2. Выберем на S^2 некоторую точку p (например, для определенности, на северном полюсе) и некоторый касательный вектор v в точке p (направленный, например, вдоль Гринвичского меридиана" [51, с.261].

Сразу же отметим, что выбранный вектор v не принадлежит поверхности сферы, а точки p и q, судя по рисункам к цитате, обе лежат на выбранном меридиане.

"Какие другие касательные векторы в других точках сферы S^2 мы должны считать "параллельными" вектору v?" [там же].

Именно это и является главным вопросом определения параллельности. В цитате отмечается различие этого понятия на сфере и на плоскости:

"Если воспользоваться евклидовым понятием "параллельности", унаследованным от стандартного погружения S^2 в евклидово 3-пространство, то мы найдем, что в большинстве точек q сферы S^2 не существует касательных векторов к S^2, которые были бы "параллельны" вектору v в указанном смысле, поскольку касательная плоскость в точке q, как правило, не содержит направления v" [там же].

Отметим смягчающие замечания "в большинстве случаев" и "как правило". Это значит, что такие касательные параллельные векторы есть. Вместе с тем, поскольку рассматривается сфера, то указания "в большинстве точек" и "как правило" выглядят чрезмерно осторожными: по сути, это очевидно. Следующее пояснение, хотя и несколько замысловатое для очевидности, но является определённо верным:

"Точки, в которых имеются касательные векторы к S^2, могущие быть "параллельными" вектору v в этом смысле, содержит лишь большая окружность, проходящая через точку p перпендикулярно к Гринвичскому меридиану" [там же].

Все векторы на указанном ортогональном меридиане, большой окружности и ортогональные к нему, параллельны вектору v в евклидовом 3-пространстве погружения. Все эти векторы и вектор v ортогональны к плоскости описанного фактически "большого круга", круга, образованного этой большой окружностью, содержащей Гринвичский меридиан.

"Подходящее понятие параллелизма на S^2 должно относиться только к касательным векторам, поэтому лучшее, что мы можем сделать, – это переносить направление вектора v в тангенциальную плоскость в точке q по мере постепенного удаления точки q от p" [там же].

Довольно замысловатое описание процесса *вращения* вектора v в процессе его удаления от полюса. У понятия "тангенциальная плоскость", популярного в деревообработке, есть синоним: "касательная плоскость". И вновь обратим внимание на противоречие: параллелизм на S^2, то есть, на поверхности сферы, отнесён к *касательным* векторам, которые этой поверхности не принадлежат. На рисунках это отчётливо показано: все вектора находятся, изображены на рисунках за пределами поверхности сферы. Фразу "переносить... в тангенциальную плоскость", видимо, следует чуть подправить: не "переносить в плоскость", а "переносить *вместе* с этой плоскостью", закрепив вектор в исходной тангенциальной плоскости, которую затем и переносим.

"Эта идея прекрасно работает, но теперь возникает новая особенность: вводимое таким образом понятие па-

раллелизма зависит от пути, по которому точка q смещается от точки p" [там же].

Идея прекрасно работает, но с чем? Такой перенос вектора – это перенос в евклидовом трёхмерном пространстве погружения, но никак не по поверхности сферы. Введённое понятие параллелизма – это традиционное, известное понятие для плоского пространства. А особенностью его является то, что перенос вектора не является параллельным по определению, приведённому в цитате. Касательный вектор v изначально определён, постулирован как вектор в пространстве погружения. Перенос, вращение касательной плоскости не имеет абсолютно никакого отношения к событиям на поверхности сферы. Обитатели этого двухмерного мира сферы не могут увидеть ни эту касательную плоскость, ни вектор, в ней лежащий. Видят они лишь одну единственную точку: точку касания. То, что эта точка движется по поверхности сферы, этим обитателям не несёт абсолютно никакой информации. Единственное, что они видят: это линия, нарисованная в их мире. Меридианная линия.

Нет, представленную идею следует признать ошибочной. Возникшая особенность состоит более в ином: параллельный перенос не относится к исходному вектору. Кроме того, эта идея косвенно не только не проясняет, а вообще ставит под сомнение саму идею параллельного переноса.

Для пояснения приводится ещё один рисунок, выполненный, следует заметить, несколько странно, даже небрежно. В цитируемой работе на рисунке рис.14.2б, который мы не приводим, изображена волнообразная кривая линия γ, начинающаяся на северном полюсе и доходящая почти до экватора.

"Рассмотрим кривую γ на S^2, начинающуюся в точке *p* и заканчивающуюся в некоторой другой точке *q* на S^2" [51, с.262].

Небрежность состоит, в частности, в том, что на этом рисунке упомянутая точка *q* не показана. В подписи к рисунку говорится:

"... будем двигать вектор *v* вдоль заданной кривой γ, постоянно проектируя его на касательную плоскость к сфере. (Полагаем, что кривая γ построена из большого числа мелких отрезков p_0p_1, p_1p_2, p_2p_3, ... , проектируемых на каждой стадии)" [там же].

Здесь также видна неточность: на кривой γ указанные мелкие отрезки не отмечены, отмечены они на находящемся рядом меридиане. Но мы догадываемся, где находятся эти отрезки. Кроме того, пока из пояснения неясно, зачем при переносе вектора *v* мы постоянно проектируем его на касательные плоскости. И в чём состоит смысл "отрезков... проектируемых"? То есть, на касательную плоскость проектируются как векторы, так и криволинейные отрезки, соединяющие его промежуточные положения? Но что это даёт?

"Затем переходим к пределу, в котором отрезки становятся все меньше"[там же].

Переход к пределу понятен: "ломаные" отрезки превращаются в плавную кривую, не понятно лишь, к чему это привело.

"Такое понятие *параллельного переноса* показано на рисунке для Гринвичского меридиана, а также для кривой общего вида γ" [там же].

Похоже на заключительный вывод, завершение пояснения. Однако показанное на рисунке понятие "*параллельного переноса*" заявленного исправления положения не достигло. Касательные векторы на рисунке по-прежнему

принадлежат евклидову пространству *погружения* E^3, а не S^2 пространству *сферы*. Косвенно это отмечено чуть выше:

"а) Непосредственное применение евклидовой "параллельности", когда сфера S^2 считается погруженной в пространство E^3, не работает (за исключением направления вдоль меридиана, перпендикулярного Гринвичскому), поскольку векторы, параллельные *v*, не остаются касательными к S^2" [там же].

Но и здесь утверждение "за исключением меридиана" – тоже не работает. Во всех случаях, включая направление, ортогональное Гринвичу, переносимые векторы не принадлежат поверхности сферы. Далее в тексте приводится более подробное пояснение, повторяющее подпись к рисунку. Интерес представляет следующий фрагмент:

"Будем передвигать вектор *v* вдоль γ, причем на каждом из отрезков $p_{r-1}p_r$ перемещать его параллельно самому себе (в обычном смысле, с использованием евклидова трехмерного пространства), а затем проектировать на касательное пространство в точке p_r" [там же].

Мы с неизбежностью трактуем фрагмент цитаты "параллельно самому себе ... евклидова трёхмерного пространства" буквально: касательный вектор *v* перемещается непосредственно в евклидовом, *плоском* трёхмерном пространстве погружения E^3. Вектор не принадлежит поверхности, пространству S^2 сферы. Далее следует не менее странная процедура: *не принадлежащий* сфере вектор проецируется на *не принадлежащую* сфере касательную плоскость. Всё это происходит вне двухмерного пространства сферы, все эти события не имеют к пространству, миру плоскости сферы никакого отношения. Параллельны переносимые вектора друг другу или нет, для двухмерного пространства сферы не имеет никакого значения. Всё, что у этих миров общего – это единственная касательная точка

вектора и плоскости к поверхности сферы, лишь одна *общая* точка.

"Эта процедура заканчивается касательным вектором в точке q" [там же].

Здесь следовало бы более определённо указать: конечный вектор является касательным к линии на сфере или находится в касательной к ней плоскости, поскольку рассматривались обе ситуации. Также отметим, что здесь нет никаких указаний на то, что *произвольная* линия переноса вектора обязательно должна состоять из отрезков *геодезических*, если не считать описанную выше процедуру укорачивания не определённых отрезков.

Приведённый анализ в общих чертах повторяет, дополняет исследования, проведённые в первой части нашей работы. Здесь, в рассмотренных цитатах мы хотим отметить другое, не менее, если не более важное обстоятельство: это разбиение линии переноса на отрезки.

"Полагаем, что кривая γ построена из большого числа мелких отрезков p_0p_1, p_1p_2, p_2p_3, ... , проектируемых на каждой стадии... Затем переходим к пределу, в котором отрезки становятся все меньше" [там же].

Автор цитируемой работы не указывает, с какой целью сделана эта аппроксимация, но по внешнему виду она выглядит традиционной. А именно: любую, произвольную линию на сфере мы можем аппроксимировать короткими, в пределе бесконечно малыми отрезками геодезических, вследствие чего результирующая линия в некотором смысле сама становится *подобием* геодезической. Но здесь возникает очевидная проблема: теперь невозможным становится не только параллельный перенос вдоль такой "геодезической", а и эквиугловой перенос. Изломы на такой псевдо-геодезической становятся бесконечно близкими и при переходе с одного бесконечно малого участка такой

ломано геодезической на следующий *частный* поворот переносимого вектора становится также бесконечно малым. Другими словами, бесконечно малым становится и изменение угла в процедуре эквиуглового перемещения. Визуально показать это изменение на рисунке просто невозможно. Вместо этого возникает ложное представление об эквиугловом перемещении. Такая аппроксимация является опасной процедурой. По сути, произвольная кривая превращается в геодезическую, хотя и составную.

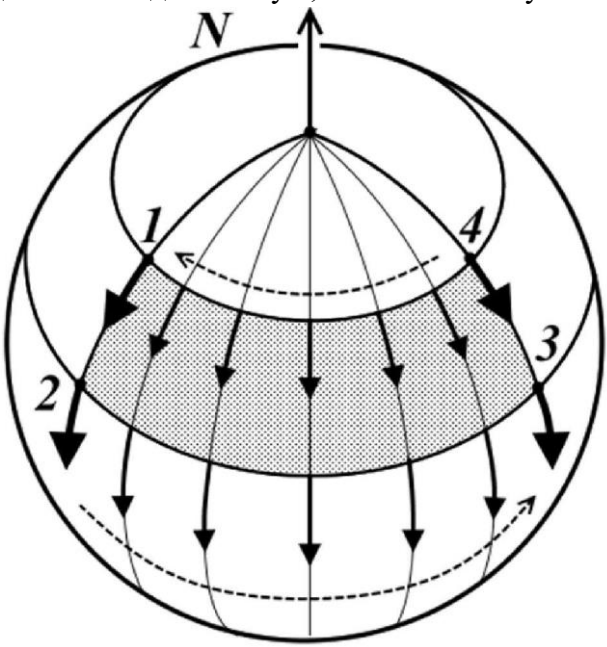


Рис.2.1. Параллельный перенос вектора на сфере с использованием аппроксимированной геодезической

В случае сферического геодезического треугольника обычно изображается "параллельный" перенос вектора, вектор в конце обхода меняет своё направление. Но что будет, если взять *сферически* квадратный или прямоугольный контур и использовать "геодезическую" аппрок-

симацию его изначально не геодезической стороны, параллели? Поскольку мы вправе произвести параллельный перенос вектора по произвольному маршруту, то мы добавили такой отрезок, превратив сферический треугольник в сферический квадрат (вернее, криволинейный четырехугольник). Как видно на рис.2.1 при таком эквиугловом переносе итоговый угол $\varphi = 0$, что означает отсутствие кривизны поверхности.

Однако поверхность сферы определённо является искривленной. Следовательно, такой метод "спрямления" параллели до геодезической неверен или, по меньшей мере, не должен использоваться при графической демонстрации эквиуглового перемещения.

Рассмотрим еще один пример перемещения вектора по *произвольной* кривой, то есть, кривой, которая не обозначена явно как геодезическая или состоящая из отрезков геодезических. Приведён соответствующий рисунок плавной замкнутой кривой с картофелеобразным контуром, не имеющим явных признаков геодезической (отрезков меридианов, больших кругов).

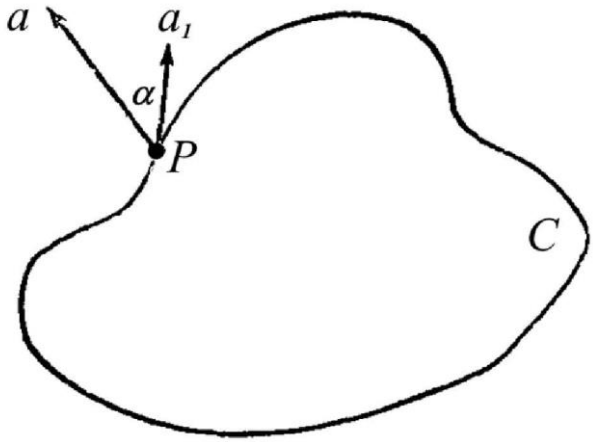


Рис.2.2. Рисунок 13 из статьи [65]

Рассматриваемые в тексте кривые линии названы прямыми, то есть, имеющими смысл геодезических. В описании рисунка сказано:

"Проведем через заданную точку *P*. какую-либо замкнутую линию – контур *C* (рис.13), возьмем некоторый бесконечно малый вектор а в точке *P* и будем параллельно перемещать его вдоль по линии *C*, пока снова не вернемся в исходную точку *P*; наш вектор превратится в вектор a_1, причем ... по направлению ... вектор а, вообще говоря, не должен совпасть с вектором a_1"[65, с.40].

Отметим мягкость заключения: "вообще говоря, не должен совпасть". Нас интересует именно этот вариант "параллельного" переноса векторов, при котором после обхода контура вектор *всегда* меняет своё направление. Таким свойством обладает "параллельный" перенос вектора по составным геодезическим на сфере. Вместе с тем, на рисунке рис.13 в цитируемой статье видно отчётливо: замкнутая траектория геодезической не является. Конечно, пространство, поверхность, на которой линия рис.2.2 является геодезической, в принципе, возможно. Однако в цитате такой вариант не отмечен. Следовательно, перенос не является ни параллельным, ни эквиугловым по отношению к какой-либо геодезической. Произвольный, не геодезический характер линии переноса не ведёт к повороту вектора при его эквиугловом переносе по замкнутой траектории. В исходную точку вектор возвращается без изменения направления. То, что вектор показан с изменившимся направлением после обхода траектории – это декларативное, бездоказательное решение.

Уточнение о геодезическом характере кривой, траектории переноса является важным обстоятельством. Принципиальная невозможность *параллельного* переноса вектора по сфере с неизбежностью требует замены *парал-*

лельного переноса на *эквиугловой*. Такой перенос возможен как вдоль геодезической, прямой линии, так и вдоль произвольной линии. Но в последнем случае, если следовать буквально правилу транспортировки с сохранением угла, то вектор совпадёт со своим исходным направлением, поскольку в начальной-конечной точке существует *единственное* направление с заданным углом.

В двух последних приведённых выше цитатах нет явного указания на геодезический характер линий переноса, хотя, вероятно, он подразумевается. Отметим это обстоятельство как важное, решающее, но явно нигде не озвученное. Изменение направление вектора при его переносе происходит только в точках излома, точках перехода вектора с одной геодезической на другую. Если геодезическая замкнута и не имеет изломов, то вектор в исходную точку *всегда* возвращается без изменения своего направления.

Перенос вектора по поверхности конуса

Излом на геодезической может быть как в случае стыковки разных геодезических, так и вследствие её самопересечения. Такая ситуация может возникнуть, например, на поверхности конуса [86] при некоторых углах развертки образующей его плоскости. Заметим, что эти геодезические на конусе являются *прямыми* евклидовыми линиями. Косвенно на это обстоятельство обратил внимание Carroll, правда, в несколько ином ключе. Рассматривая криволинейную траекторию переноса вектора, он указал

"Конус – это пример двумерного многообразия с ненулевой кривизной ровно в одной точке. Мы можем увидеть это также, развернув его; конус эквивалентен плоскости с удаленным "дефицитным углом" и обозначенными противоположными сторонами" [4, с.83].

Рассматриваемый далее *параллельный* перенос в общих чертах в цитате описан верно: на поверхности конуса такой перенос возможен:

"В метрике, унаследованной от этого описания как часть плоской поверхности, конус плоский везде, кроме вершины. Это можно увидеть, рассматривая параллельную транспортировку вектора по различным петлям; если цикл не охватывает вершину, не будет общего преобразования, тогда как цикл, который действительно охватывает вершину (скажем, только один раз), приведет к повороту на угол, который является просто недостающим углом" [там же, с.84].

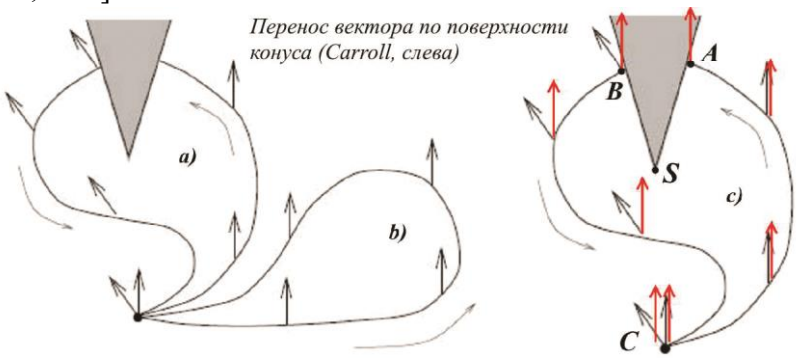


Рис.2.3. Перенос вектора по поверхности конуса [4, с.83]

Вместе с тем отметим, что на рисунках рис.2.3a и рис.2.3b просматривается странная ситуация. Действительно, вся поверхность конуса, приведённая на рисунке рис.2.3 в виде развёртки, является *плоской* в евклидовом смысле. Это прямо означает, что любые два отрезка, параллельные друг другу, остаются параллельными при любом параллельном переносе. Рассмотрим немного другую, инверсную ситуацию. Перенесём векторы A и B из конечной точки C независимо друг от друга, считая их изначально параллельными. В точках A и B эти векторы после переноса останутся параллельными. В чём тогда причина

нарушения в цитате? То, что, как указано в цитате, вектор после переноса по замкнутому контуру испытал поворот, прямо, *классически* означает: пространство конуса *криволинейное*. Либо следует признать, что параллельный перенос не может служить индикатором кривизны. Однако противоречие в ином.

Рассмотрим ещё один вариант переноса: в том же направлении перенесём вектор из точки B в точку A. Очевидно, что после такого переноса векторы будут строго параллельны, что соответствует их положению относительно линий координат. Однако визуально, из пространства погружения векторы будут расположены под углом, равным недостающему углу. Возникает естественный вопрос: так параллельны векторы или расположены под углом? Возникает также и второй вопрос-возражение: вектор B, вообще-то, строго говоря, не вернулся в *исходную* точку B, поскольку, как мы указали, путь завершён в точке A. Что будет, если перенести вектор через линию разреза? Линия разреза конуса – это линия, которую мы можем выбрать вдоль *любой* его образующей. На конусе эта линия разреза *изначально* не задана. Если мы обходим вершину конуса S полностью, по замкнутой кривой, то, естественно, мы рано или поздно будем вынуждены пересечь и линию разреза, скрывающую недостающий угол. Вот в чём и заключено это противоречие: вращение вектора происходит *тогда* и *только* тогда, когда он пересекает линию разреза. Не вершина конуса S является единственной не плоской точкой, а линия разреза является *запрещённой* для пересечения линией. На поверхности конуса мы можем производить любые построения, которые будут строго соответствовать положениям евклидовой геометрии, но только с соблюдением запрета на пересечение линии разреза. Линию можно задать до нанесения координатной сетки на поверхность

конуса, а можно и в процессе построений, если для неё останется пространство, в котором она не пересекает наши построения.

Для условных двухмерных обитателей поверхности конуса эта линия разреза имеет статус *непреодолимой* границы, своеобразной стены. Можно двигаться как угодно по поверхности, но пройти сквозь стену невозможно. Вернее, невозможно пройти без искажений. Эта стена является, так сказать, "кротовой норой" для обитателей поверхности конуса, своеобразной Чёрной дырой. Собственно говоря, эта ситуация возникает просто потому, что недостающий угол – это вырезанная часть плоскости Евклида. Участок плоскости, удалённый из неё. Никакие движения по несуществующему участку невозможны. Этот участок можно как угодно деформировать: сжать, растянуть, свернуть. Никакие манипуляции с ним не меняют этого участка: при любом изменении *Ничего*, если придавать этому изменению хоть какой-то смысл, *Ничто* остаётся *Ничем*.

Как вариант, стена может быть прозрачной. В этом случае любая линия, упёршаяся в стену, может быть продолжена обитателями за стеной. При этом как угодно: быть визуальным продолжением, либо также визуально лежать под таким же углом к линиям координат, как и повторяемая. Но это уже две *разные* линии. Следовательно, и линии CA и BC на рисунке рис.2.3c из цитаты не являются замкнутым контуром – это две *разные* линии.

В цитате выбрано продолжение линии, BC, кажущееся "параллельным" линии CA. В кавычки мы взяли это слово, поскольку на самом деле точки A и B следовало бы считать *одной* точкой, точкой *излома* на линии, что формально означает – линии разные.

Как видим на сдвоенном рисунке рис.2.3a и рис.2.3b, перенос производится *параллельно* по *произвольной* траек-

тории в разных областях конуса, по линии, не являющейся геодезической. Однако такой перенос в *плоском* пространстве не ведёт к повороту вектора. Если в результате такого переноса вектор изменил направление, то пространство не является плоским и в нём параллельный перенос *невозможен*, а допустим лишь *эквиугловой* перенос, причём только вдоль геодезической. То есть, в нашем случае невозможен и эквиугловой перенос, поскольку линии переноса не объявлены геодезическими, а визуально выглядят как линии *произвольные*. Эквиугловой перенос вектора вдоль *произвольной* линии не является индикатором искривлённости пространства, поскольку поворот вектора определить невозможно, он может быть любым.

Зададимся вопросом: как условный "плосковитянин", обитатель поверхности конуса, определяет, что линия переноса является *геодезической*, а перенос вектора – *параллельным*? Самым очевидным является использование координатной сетки. При её наличии все вопросы о геодезических и параллелях на плоскости снимаются.

В общем случае определение, выявление *искривлённости* поверхности без использования понятия погружения является неоправданно сложной процедурой, имеющей целый ряд недостатков и обязательных оговорок. Такой перенос целесообразно использовать лишь как демонстрацию, как геометрическое *следствие* одного из свойств искривлённого пространства, но никак не для его диагностики, тестирования. На рис.2.4 мы показали *эквиугловой* перенос вектора по плоскости по разным траекториям. Как видим, один и тот же вектор (слева) приходит в конечную точку (справа) с разным поворотом в зависимости от вида линии переноса. Две из них являются для плоскости геодезическим, по ним чёрный и зелёный векторы после перемещения сохранили свои направления. Но линии, со-

держащие негеодезические вставки, привели к повороту синего и красного векторов, причём в разные стороны. Отметим, что *эквиугловой* перенос по *геодезическим* на плоскости тождественен *параллельному* переносу.

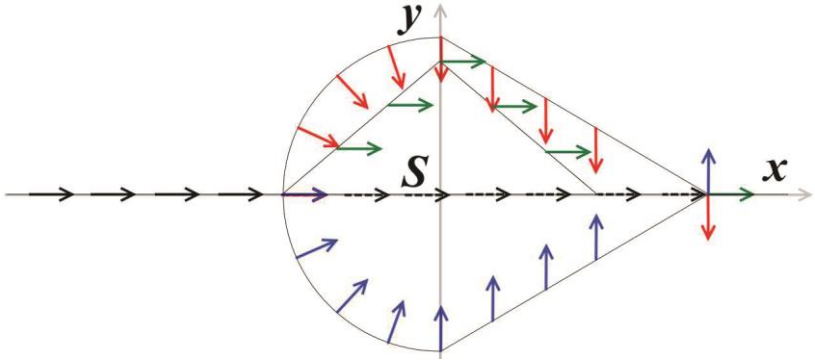


Рис.2.4. Четыре траектории эквиуглового переноса векторов на плоскости: прямая, угловая линия и две вставки четверти окружности

На рисунке рис.2.3а мы видим, что оригинальные векторы, обозначенные далее как А и В, не параллельны друг другу, то есть, пространство, поверхность определена, протестирована как искривлённая. В соответствии со свойством эквиуглового переноса вдоль линий, не являющихся геодезическими, если бы переносимый вектор имел неизменный угол к изображенной *произвольной* линии переноса, то в исходную точку он вернулся бы с любым наперёд заданным углом поворота. Однако перенос на рис.2.3а является ни параллельным, как заявлено, ни эквиугловым.

На рисунке рис.2.3с мы добавили красные векторы. Так на самом деле должен выглядеть *параллельный* перенос в плоском пространстве. Ещё раз отметим: важным моментом на рисунке является переход вектора через "недостающий угол". Две точки А и В на поверхности конуса –

это точка, рассматриваемая в цитате как одна и та же, просто нами изображённая дважды. Вряд ли можно допустить, что в ней один и тот же вектор одновременно имеет разные направления, поэтому векторы A и B мы изобразили строго параллельными *всем* другим векторам, поддержав утверждение цитаты о параллельном переносе. Отметим ещё более определённо: развёртка конуса с "раскрытием" его "недостающего угла" явно демонстрирует, что эта поверхность является плоскостью. Тем не менее, при заявленном параллельном переносе, вектор *принудительно* повёрнут.

Если пренебречь *запретом* на переход через линию разреза, через недостающий угол, некоторые положения евклидовой геометрии на поверхности конуса будут нарушены. Например, прямая линия на конусе может пересекать саму себя. Две *прямые* линии, отрезки a и b на рис.2.5, могут образовывать геометрическую фигуру "двухугольник", то есть, они пересекаются дважды в двух разных точках – в точке A и в точке B.

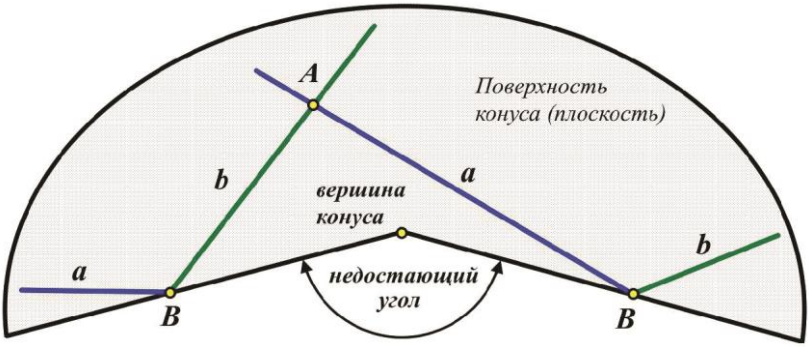


Рис.2.5. Прямые отрезки a и b пересекаются дважды на поверхности конуса

Помимо конуса с *недостающим* углом возможны конусы с *избыточным* углом [86]. На поверхности таких конусов можно наблюдать противоположный эффект: из-

начально параллельные линии, проходящие мимо полюса с двух сторон, начинают удаляться друг от друга.

Традиционно конус создают из плоскости, вырезав в ней угол из прямых линий – тот самый недостающий угол рис.2.6. Иначе говоря, часть плоскости буквально *исчезает*. Затем стороны угла смыкают, рис.2.7, вследствие чего и образуется коническая поверхность. Для наглядности и более удобного исследования конической поверхности угол следует вырезать относительно какой-либо из осей координат. На рис.2.6 мы вырезали угол в четвёртом квадранте, совместив одну из его сторон с осью абсцисс. На рис.2.7 мы сомкнули стороны угла и показали лишь участок поверхности вблизи линии смыкания, там где "спрятан" недостающий угол.

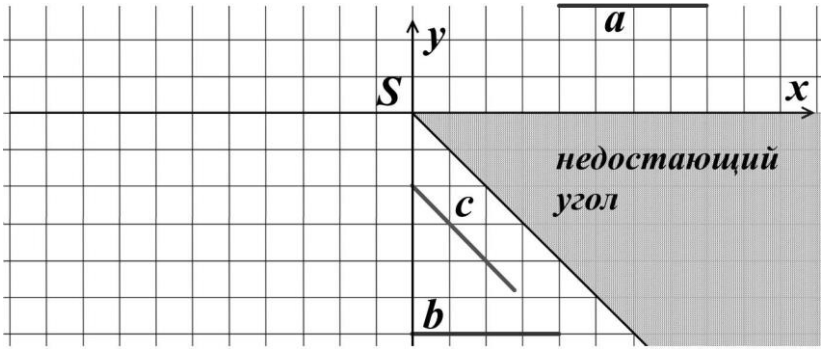


Рис.2.6. Создание развёртки конуса с координатной сеткой и недостающим углом

Сразу же заметим, что поверхность конуса при этом не имеет точек кривизны, *вся* она строго плоская в евклидовом смысле. Поскольку мы нанесли на его поверхность координатную сетку, сразу же можем отметить странную на первый взгляд ситуацию. На рис.2.6, на поверхности конуса параллельными являются отрезки a и b, хотя на рис.2.7 кажется, что они расположены под углом. Напротив, линии c и a параллельными не являются – рис.2.6, хотя извне явно

видна их параллельность – рис.2.7. Это иллюзия: отрезки a и b расположены вдоль оси абсцисс и являются параллельными по определению. На развертке это видно отчётливо.

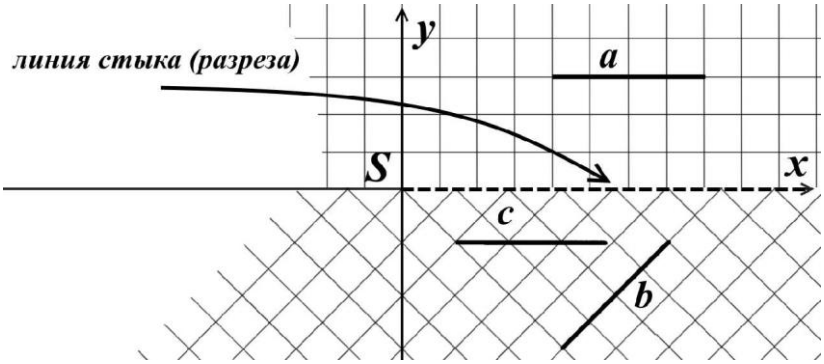


Рис.2.7. Фрагмент поверхности конуса с линией разреза, скрывающей недостающий угол

Отметим, что традиционный способ формирования конической поверхности вырезанием недостающего угла не является единственным. На следующем рисунке рис.2.8 изображена развёртка конической поверхности, образованной из плоскости с криволинейным недостающим углом. Аналитическое определение формы сторон такого *произвольного* угла, видимо, достаточно громоздки. Поэтому мы произведём обратную процедуру формирования этого угла. Обычным способом создаём конус из плоскости с нанесённой координатной сеткой и вырезанным недостающим углом, как показано на рис.2.6. Далее на поверхности конуса мы рисуем произвольную линию, наугад. После этого ножницами разрезаем поверхность конуса вдоль этой линии и, как результат, получаем плоскую развертку рис.2.8. Поскольку поверхность конуса мы объявили строго евклидовой плоскостью, то исходную координатную сетку с вырезом рис.2.6 мы заменяем сеткой первого квад-

ранта, просто расширив её на всю поверхность развёртки кроме вырезанных областей. Эти области недостающих углов являются областями, запретными для построений и даже для их пересечения. Границы углов при построениях означают буквально *физические* границы, как границы обычного чертёжного листа. Вопросы параллельности и параллельного переноса векторов решаются строго в рамках евклидовой плоскости с учётом "дырок" на листе.

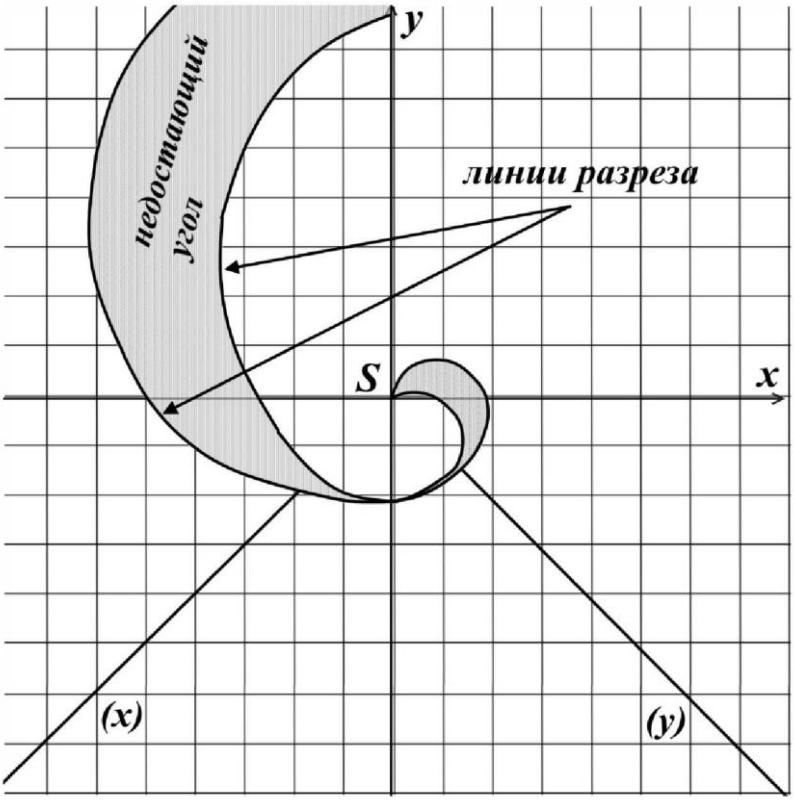


Рис.2.8. Развёртка поверхности конуса с криволинейным недостающим углом и координатной сеткой

Очевидно, что любая линия, пересекающая нарисованную нами линию разреза, линия, кажущаяся сплошной

на поверхности конуса, на самом деле является *составной*: до разреза и после него. В области линии разреза, в точке касания разреза, эта составная линии лишь *кажется* сплошной и без излома. На развёртке в этой точке линия, казавшаяся сплошной, разбивается на две независимые, не соприкасающиеся линии. Если эта линия была на конусе визуально прямой линией, то на развёртке эти два фрагмента находятся под углом, равным недостающему углу исходного конуса рис.2.6. Заметим, что такой поворот напоминает прохождение луча света через призму.

Таким же двусмысленным свойством быть плоскостью и одновременно искривлённой поверхностью обладает поверхность куба – рис.2.9. Если по его поверхности вектор переносится по замкнутому контуру произвольной формы, параллельно и без обхода, охвата какой-либо из его вершин, то в исходную точку вектор возвращается без поворота – рис.2.9b.

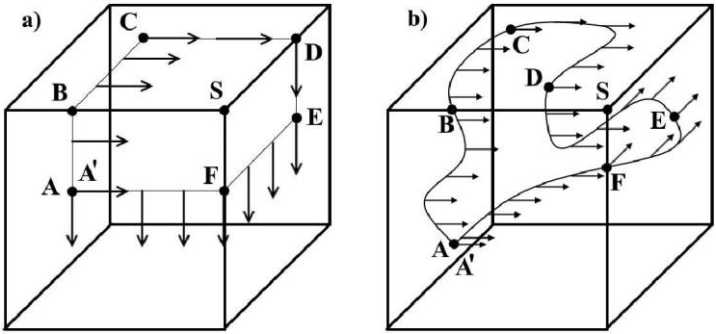


Рис.2.9. Параллельный перенос вектора по поверхности куба с обходом вершины a) и без обхода b)

Если же контур охватывает какую-либо вершину, то даже при строго *параллельном* переносе по *геодезической* вектор возвращается в исходную точку с поворотом. Угол поворота всегда кратен прямому. Например, при охвате двух

вершин куба вектор меняет своё направление на противоположное, при охвате одной вершины – поворот равен 90 градусам, рис.2.9а.

Такое сходство вполне объяснимо. Три смежные грани куба эквивалентны поверхности некоего конуса, который просто "разглажен" с образованием трёх рёбер. Кстати, граней может быть сколько угодно, то есть, конус можно деформировать, превратив в многогранную пирамиду. Более того, можно заметить сходство сдвоенного конуса помимо куба с другими фигурами: сферой и октаэдром – рис.2.10. Сходство этих фигур можно заметить в плане наличия полюсов, как на сфере. Каждая из фигур рис.2.10 имеет три пары полюсов. Мы расположили фигуры так, чтобы их верхнюю и нижнюю точки обозначить как полюса север и юг. Остальные полюса удобно рассмотреть сначала на примере сферы. Традиционно в качестве системы координат сферы используются меридианы и параллели. Однако это не единственный вариант. Координаты могут быть образованы и ортогональными параллелями и ортогональными меридианами, как показано на рис.2.10b. Две системы меридиан означают наличие двух пар полюсов. Традиционная пара, как показано на рисунке, это север и юг. Вторую пару полюсов, для второго набора меридиан мы назвали Запад-Восток. Отметим интересную деталь. Если мы находимся на полюсе, то у нас существует единственное направление – на смежный полюс. В случае двух систем меридианов, двух пар полюсов таких направление становится больше. Находясь, например, на северном полюсе, во всех направлениях у нас будет юг. Но не только. Появляется ещё два направления: это юго-восток и юго-запад. Причём возникшие ещё два направления выглядят двусмысленно: это направление точно между западом и востоком. Эта двусмысленность позволила ввести

ещё одну пару полюсов, которую мы назвали Полдень и Полночь. То есть, находясь на северном полюсе, мы имеем ещё два направления: юго-полдень и юго-полночь. Эти два дополнительных полюса не нужны для создания координатной сетки, поскольку два набора меридианов и две пары полюсов однозначно определяют координаты любой точки на поверхности сферы.

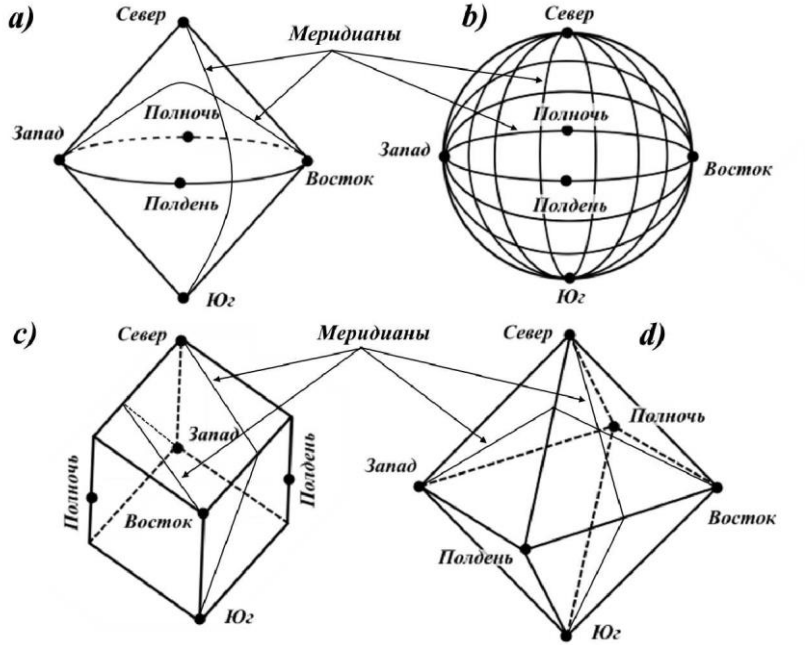


Рис.2.10. Меридианные координаты на сдвоенном конусе, сфере, кубе и октаэдре.

По аналогии со сферой мы можем установить такие же три пары полюсов на сдвоенном конусе и на октаэдре – рис.2.10a,d. Отметим некоторое отличие полюсов на кубе. Две пары – юг-север и запад-восток – ничем не отличаются от таковых на других фигурах. Но пара полюсов Полдень-Полночь иная. Мы можем обозначить их двояко: либо как точки на серединах боковых рёбер куба, либо как сами

эти рёбра. По сути, это не принципиально и не имеет никаких противоречий.

На каждой из фигур в качестве примера мы изобразили по одному ортогональному меридиану. Для каждой пары меридианных полюсов смежные нулевые меридианы являются экваторами.

3. О возможности сравнения векторов

Процедура параллельного переноса векторов чаще всего используется для *демонстрации* кривизны пространства: перенесённый вектор изменяет своё направление только в искривлённом пространстве. Нередко такая демонстрация представляется в особом свете: утверждается, что обитатель искривлённого мира способен определить его кривизну, не прибегая к понятию пространства погружения. Как мы обнаружили, эта процедура переноса связана с весьма сомнительными выкладками, и фактически является эквивалентным, но довольно усложнённым способом определения кривизны через сумму углов треугольника. Более того, для такого определения кривизны использование *параллельного* переноса вектора в искривлённом пространстве некорректно, поскольку в искривлённом пространстве параллельных линий нет и быть не может по определению. Некоторые авторы описывают на самом деле *эквиугловой* перенос, не делая, впрочем, на этом акцента.

Но и в случае использования эквиуглового перемещения, в таких выкладках мы нередко обнаруживаем ряд недомолвок. Главным спорным, вернее даже, ошибочным моментом является то, что в качестве линии переноса зачастую объявляют *произвольную* линию, линию не являющуюся геодезической. Более замысловатым вариантом является аппроксимация такой произвольной линии бес-

конечно малыми отрезками геодезических. При этом остаётся незамеченным, что и в этом случае от "геодезической" природы *произвольной* линии ничего не остаётся.

Бесспорным было и остаётся то, что эквиугловой перенос вектора вдоль геодезической или цепочки геодезических, действительно, приводит к изменению направления вектора, зависимого от выбранного пути. Эти уточнения относительно использования геодезических встречаются нечасто, поэтому повторим: перенос вектора обязательно должен производиться вдоль геодезической или их неразрывной последовательности и с неизменным углом относительно них. При нарушении этих правил переноса закономерно возникают другие, довольно спорные, мягко говоря, трактовки. Пожалуй, наиболее странным и удивительным следует признать утверждение о принципиальной *невозможности* сравнивания векторов. Буквально это можно трактовать как бессмысленность вообще каких-либо *недеформирующих* переносов векторов в пространстве.

"Как мы видим в римановой геометрии, в отличие от евклидовой, непосредственное сравнение векторов, удаленных друг от друга, то есть векторов, находящихся в различных точках пространства, невозможно" [23, с.126].

Конечно, можно сказать, что в цитате отвергается процедура всего лишь *непосредственного* сравнения векторов, однако явно эта *непосредственность* не описана. Возможно, речь идёт о *прикладывании* двух векторов друг к другу в конечной точке, при котором они либо совместятся, либо образуют некоторый угол. При этом остаётся неясным, возможно ли такое *непосредственное* сравнение векторов *скоростей* двух разных частиц, если они находятся не в удалённых, а в *близлежащих* точках пространства? Для определённости мы исключаем варианты, когда вектор в процессе перемещения изменяет свою длину, что,

строго говоря, возможно, то есть, мы придерживаемся аргументов, отвергающих геометрию Вейля.

Подобную точку зрения о невозможности сравнения векторов, находящихся в разных точках пространства, изложил ещё один автор:

"В отличие от некоторых проблем, с которыми мы столкнулись, у этой проблемы нет решения – мы просто должны научиться жить с тем фактом, что два вектора можно сравнивать естественным образом, только если они являются элементами одного и того же касательного пространства" [4, с.64], [3, с.104].

Является ли указанный в этой цитате *естественный* образ сравнения тождественным *непосредственному* сравнению из предыдущей цитаты? Здесь мы видим буквальную трактовку: сравнивать можно только векторы, находящиеся в пространстве Евклида, на плоскости, поскольку касательным пространством обычно считается именно плоскость Евклида. Непосредственно на поверхности сферы таких векторов быть не может вообще. Векторы в касательном пространстве не принадлежат пространству искривлённому, поскольку любые векторы в них могут иметь с "касаемыми" искривлёнными пространствами лишь одну общую точку и ничего более. А точка, понятно, вектором не является, сколько бы касательных пространств мы ни построили.

"Например, две частицы, проходящие мимо друг друга, имеют четко определенную относительную скорость... (которая не может быть больше скорости света). Но две частицы в разных точках изогнутого многообразия не имеют четко определенного понятия относительной скорости – это понятие просто не имеет смысла" [4, с.64], [3, с.104].

Заметим, что фразу "относительную скорость, которая не может быть больше скорости света" саму следует назвать утверждением "относительным". В любой ИСО два фотона могут удаляться друг от друга с *относительной удвоенной* скоростью света. Расстояние между ними при таком удалении возрастает с *удвоенной* скоростью света. Согласно кинематике ведущих физических теорий, галилеевой, эйнштейновой, *любые* скорости – относительные. Правильнее было бы сказать, что смысла не имеют как раз *абсолютные* скорости, а отношение скоростей указанных частиц мы просто не можем *измерить*, что, вообще-то, тоже неверно. Отрицание относительной скорости в цитате, по сути, лишает смысла понятие скорости вообще как таковой. В плоском двухмерном пространстве относительная скорость определяется изменением длины *наименьшего, геодезического* расстояния между объектами за единицу времени, то есть, скоростью изменения длины геодезической, причём не только в плоском, но и в искривлённом пространстве. Очевидно, что никаких физических запретов не имеют ни измерение интервала времени, ни измерение длины геодезической в любой момент времени.

Утверждение об отсутствии, бессмысленности относительной скорости следует признать не просто спорным, оно ошибочно. Соответственно, и утверждение: "не имеют чётко определённого понятия *относительной* скорости" (курсив в цитате наш) является странным, бездоказательным постулятивным, а вся цитата в целом выглядит как подмена понятий.

Подобные критические взгляды, отметим, довольно редки. Нам встретилось лишь ещё одно, третье высказывание о такой невозможности сравнивания векторов с прямой отсылкой к процедуре их параллельного переноса:

"В общем случае многообразие будет изогнутым, и возникает тонкая проблема, касающаяся того, как сравнивать векторы или более общие тензоры в разных точках на многообразии" [5, с.13].

Оставим без анализа "более общие тензоры", поскольку проблема со *сравниванием* просто векторов весьма значительна уже сама по себе, хотя и отмечена как "тонкая проблема". Для визуализации этой проблемы, как один из вариантов, в цитате предложено использовать традиционный перенос вектора на поверхности сферы:

"... когда многообразие искривлено, больше не существует однозначного способа сравнения векторов, определенных в разных точках на многообразии. Один из интуитивно понятных способов визуализировать это – рассмотреть перенос геометрического вектора на двумерной сфере, встроенной в трехмерное пространство" [там же].

Общепризнанно, что такой перенос вектора из одной точки в другую на изогнутом многообразии будет зависеть от выбранного пути. Другими словами, в точку назначения в зависимости от выбранной трассы "придут" разные векторы. Следовательно,

"... поскольку нет предпочтительного пути для выбора, мы не можем найти значимый способ сравнения векторов в разных точках на многообразии, то есть в разных касательных пространствах" [5, с.13].

Сразу же возразим: касательные пространства к переносу векторов не имеют никакого отношения, о чём мы неоднократно говорили. Векторы в касательных пространствах не принадлежат в данном случае поверхности сферы. Все векторы на сфере являются отрезками геодезических, то есть, наикратчайших, но *кривых* линий. Сказанное нами является пока *неявным*, скрытым опровержением цитаты [5, с.13]. Как мы отметили: вектор – это отрезок, коллинеарный

геодезической. То есть, любой касательный вектор на поверхности сферы обязательно *сливается* с той или иной геодезической. Иначе говоря, этот вектор имеет некое условное *направление*, задаваемое этой геодезической. Но *направление* конкретной геодезической на сфере всегда однозначно, предопределено и нигде на ней не меняется. Следовательно, коллинеарный вектор, перемещаемый по этой геодезической, в любой её точке так же всегда имеет одно и то же направление, направление этой геодезической. Подчеркнём: при таком перемещении вектор, как и геодезическая, нигде и никогда не меняет своего *геодезического* направления. В любой точке сферы, через которую проходит эта геодезическая, вектор в процессе скольжения так же имеет это *неизменное* направление. Первый вывод, следующий из этих рассуждений как возражение утверждению [5, с.13]: предпочтительный выбор есть, он однозначен и единственно правильный – это геодезическая, соединяющая исходную и конечную точки. Перенос вектора в искривлённом пространстве мы производим не в неопределённость, не в неизвестность, а в однозначно заданную конечную точку, в наш измерительный прибор. Другими словам: *линия* переноса вектора в *любом* искривлённом многообразии *предопределена*. Конечно, можно выбрать между этими двумя предопределёнными точками и какую-либо другую траекторию, любой кривизны и длины. Таких линий на поверхности сферы – бесконечное множество. А геодезическая, проходящая через эти точки, – *единственная*. Из этого повторно делаем, подтверждаем вывод: предпочтительный путь для выбора есть, и он *строго* предопределён – это геодезическая, соединяющая исходную и конечную точки. Между двумя точками есть только одна наикратчайшая линия, только одна единственная геодезическая. Мы рассматриваем меридианную

систему координат сферы, поэтому все геодезические, проходящие между точками через *другую* половину сферы, мы отбрасываем.

Однако, могут нам возразить, векторы не всегда лежат *вдоль* геодезической, соединяющей две точки. На это мы сначала приведём традиционный пример с переносом вектора вдоль экватора и ортогонального ему. Необоснованно, неверно считается, что такой перенос является параллельным. Ошибка в том, что на поверхности сферы в принципе нет параллельных линий, поэтому и никакого параллельного переноса нет и быть не может. Тогда почему вектор при обходе всего экватора в точности совпадает со своим исходным положением? Здесь на самом деле присутствует не *параллельный*, а *эквиугловой* перенос вектора. На всём пути своего движения вектор *всегда* находился под одним и тем же углом к линии переноса, а к экватору – под прямым. И в начале движения и, соответственно, в конце движения. Но прямой угол – это для наглядности демонстрации. Вектор может иметь с линией переноса *любой* угол. Пройдя полный круг на сфере, причём не обязательно вдоль экватора, вектор вернётся в исходную точку под тем же первоначальным углом, совпав со своим исходным положением. Из этого делаем последний вывод, завершающий наши возражения: перенос вектора вдоль геодезической, соединяющей начальную и конечную точки, всегда сохраняет направление вектора, задаваемого углом к линии переноса, геодезической переноса.

Особо подчеркнём: линия переноса обязательно должна быть единой, неразрывной геодезической. Любое "перескакивание" с геодезической на геодезическую приводит к увеличению расстояния между точками. По определению эквиуглового переноса по неразрывной наикратчайшей, геодезической угол наклона вектора к этой геоде-

зической сохраняется неизменным. Использование для переноса понятий параллельности, касательных пространств и проекций вектора на них только вводит в заблуждение, приводя к ошибочным выводам.

Однако собственно перенос вектора пока ничего нам не сказал о возможности сравнения векторов. Что означает указанная в утверждении [23, с.126] *невозможность* сравнения векторов? Хорошо, мы перенесли вектор из отдалённой точки в конечную, целевую с соблюдением правил "по геодезической с сохранением угла". Вот они, два вектора, лежат, так сказать, на столе рядом друг с другом. Что дальше? Что мешает нам их сравнить? А мешает, как можно догадаться, отсутствие определения: что такое *сравнивание* векторов? Действительно, мы можем сравнить длину двух отрезков, веса двух гирь, время происхождения каких-либо событий, но что означает "сравнить векторы"?

Первое, очевидное: мы можем сравнить *длины* двух векторов. При этом неважно, каким путём они к нам прибыли, поскольку мы постулировали, что при перемещении векторов их модули не меняются. Поскольку вектор – это, по сути, указатель *направления*, то сравнивать, видимо, и следует эти два разных в общем случае направления. Но как это сделать? Возникает, строго говоря, весьма странная ситуация. На поверхности сферы векторов, имеющих *одинаковое* направление, не существует *вообще*. Особенно это заметно с точки зрения пространства погружения. Любой вектор на сфере – это кривая линия. Есть ли у кривой линии направление? Ну, разве что, по кругу. Только как-то странно называть направлением движения постоянно меняющееся... направление. Касательный вектор в данном случае эквивалентом не является.

С точки зрения обитателей сферы, проблема направления выглядит ещё более странно. Например, все без ис-

ключения векторы на полюсе сферы имеют одно и то же направление – на смежный полюс. Но они, понятно, друг с другом не сливаются, это *разные* векторы. Как ни перемещай любой из них на другой полюс, вектор обязательно изменит своё направление – на предыдущий полюс. Выходит, правы цитированные авторы: сравнивать векторы нет никакой возможности? Но в этом случае так же теряет смысл и всякий *перенос* векторов в искривлённом пространстве. Выходит, что вектор, перемещённый в новую точку, не имеет с исходным вектором ничего общего. Кроме модуля. Иначе говоря, в процессе перемещения вектора он теряет одно из своих определяющих свойств: направленность. Формально он превратился в скаляр, хотя в новой точке у него всё-таки явно есть какое-то направление, новое. Действительно, ситуация выглядит весьма странно. Чтобы разобраться в ней, произведём тестовый перенос на сфере некоторого вектора с соблюдением правила "эквиугловой-геодезическая".

Рассмотрим две точки на поверхности сферы. Пусть одна будет на полюсе, а вторая находится на удалении от неё. Между этими двумя точками и, добавим, между двумя *любыми* точками, мы можем провести наикратчайшую – геодезическую. В каждой из этих точек строим по вектору. Напомним: каждый из построенных векторов *обязательно* является отрезком какой-либо геодезической, отрезком большого круга, то есть, отрезком *кривой* линии. Никакие касательные к сфере пространства, плоскости эти вектора вместить не могут: они будут, так сказать, "выпирать" из этих плоскостей. Но и проекции векторов на эти касательные пространства к нашим векторам имеют крайне отдалённое отношение, имея с ними лишь по одной общей точке. Вопрос, таким образом, состоит в том, как сравнить эти два *криволинейных* вектора.

Если отбросить различие в их направлениях, то два отрезка больших кругов, векторов в нашем случае, вполне могут иметь одну и ту же скалярную длину. Для определённости постулируем это. Следовательно, вопрос формулируется чуть короче: как сравнить *направления* этих криволинейных отрезков, отрезков больших кругов? Каждый из векторов, повторим, сливается с той или иной геодезической, большим кругом сферы. Все эти круги, геодезические имеют между собой раз и *навсегда* заданный угол в точке пересечения. В том числе, углы предопределены попарно так же и между тремя геодезическими: теми, на которых лежат наши вектора, и геодезической, соединяющей их начала, заданные нами точки.

Любой большой круг сферы мы можем вращать вокруг оси, ортогональной к плоскости любого другого большого круга. При этом в точке пересечений этих двух кругов угол будет всегда один и тот же. Это очевидно просто в силу симметрии. Такое вращение можно назвать эквиугловым для вектора, находящегося в точке пересечения геодезических и лежащего на одной из них.

Вращая этим способом один из векторов с его "персональной" геодезической мы обязательно рано или поздно коснёмся их точкой пересечения другой точки. Но эта другая точка – начало второго вектора и теперь уже его "персональной" геодезической. Иначе говоря, оба вектора своими началами, своими начальными точками совместились.

В процессе вращения кругов мы ничего на поверхности сферы не меняли, сохранились все углы между всеми парами участников "вектор-геодезическая", угол между которыми по определению равен нулю, и два угла: "геодезическая между точками" и две "персональные" геодезические.

Далее идёт элементарная арифметика: суммарный угол между векторами однозначно определяется их углами относительно геодезической между точками, линии переноса. Сколько бы мы ни вращали "измеряемый" вектор с его геодезической, при совмещении его со второй, целевой точкой угол между ним и вторым вектором всегда будет определяться этой элементарной арифметикой и всегда будет *одним и тем же*.

Сначала заметим, что возможный вопрос-возражение: "почему мы вращаем вектор именно вдоль этой геодезической, а не по какой-нибудь другой или по ломаной?" не имеет под собой никаких оснований. Главное: мы используем для переноса вектора наикратчайшую линию, геодезическую, которая на сфере является *единственной* и *наипростейшей*.

А теперь решающий вопрос: образовавшийся в результате такого замысловатого вращения угол между двумя векторами, что это за угол? Каков его смысл? Совершенно точно, этот результирующий угол *предопределён* как исходным углом перемещаемого вектора, так и углом вектора в точке назначения. Поскольку эти два угла, по сути, тождественны соответствующим *направлениям* векторов, то так и спросим: что означают направления двух совмещённых векторов, разные в общем случае? Очевидно, что возможен и *частный* случай, когда два вектора в целевой, конечной точке *совместятся*.

В любом случае некое "привязанное" к поверхности сферы направление переносимого вектора *однозначно* связано с углом между его перенесённой копией и вектором в конечной точке. Но пока по-прежнему неясно, как именно всё-таки сравнить, количественно, например, в градусах эти два направления, исходные направления двух векторов. Очевидным решением является введение ка-

кой-то системы координат, в которой эти направления можно будет охарактеризовать конкретными числами. Но здесь возникает некоторая неопределённость. Использовать декартову, прямолинейную систему координат на искривлённом многообразии, как утверждается [16, с.60], невозможно. Использование же обычной для сферы системы координат в виде меридианов и параллелей также имеет серьёзный недостаток. Любой вектор, описанный в этих *координатах*, будет иметь разную длину, в зависимости от того в какой точке сферы он находится. Например, на рис.3.1a векторы A и B имеют одинаковую "координатную" длину: два меридиана в ширину и две параллели в высоту. Однако отчётливо видно, что их длины при этом – разные. Одной из причин этого различия является то, что в зависимости от параллели расстояния между меридианными точками различаются. На экваторе интервал между соседними меридианами намного больше, чем вблизи от полюса. Но тогда, может быть, система координат параллель-параллель исправит ситуацию? Между всеми параллелями на поверхности сферы всегда одно и то же геометрическое расстояние. То есть, параллели можно назвать эквидистантными кривыми. Однако нет, этот приём также не приводит к желаемому результату. На том же рис.3.1b видим, что такие же два вектора A и B имеют визуально разную длину, хотя в параллелях каждый из них является диагональю квадрата со сторонами, равными одной параллели.

И всё-таки проблема имеет решение. Нужно просто использовать сферическую систему координат. Заметим, что эта система описывает *трёхмерное* пространство, а мы рассматриваем векторы на *двухмерной* поверхности. Но это не должно быть препятствием, поскольку изначально эту двухмерную поверхность мы рассматриваем именно как

находящуюся в пространстве погружения – трёхмерном евклидовом пространстве. Условные обитатели двухмерного мира вполне могут исследовать недоступную им для наблюдения третью координату этой выбранной системы координат. Точно так же, как мы исследуем недоступную для наблюдения в нашем трёхмерном мире четвёртую пространственную координату. Систему координат пространства погружения, разумеется, мы также вольны выбрать из соображений удобства.

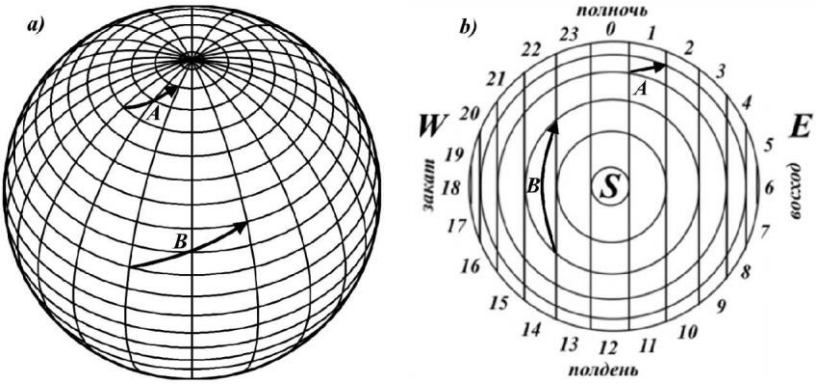


Рис.3.1. В традиционных меридиан-параллель и в специальных параллель-параллель координатах поверхности сферы длина вектора зависит от его положения на сфере

Мы будем использовать совместно декартову и частично сферическую системы координат. Координаты всех точек двухмерного многообразия, сферы описываются в декартовой системе уравнением $x^2+y^2+z^2 = R^2$. Каждый вектор, например, векторы A и B на рис.3.2 мы будем задавать декартовыми координатами их начала и конца. Строго говоря, это не обязательно, но мы считаем это более удобным. Для того чтобы длина вектора была неизменной при его нахождении в любой области сферы, мы задаём правило: векторное произведение радиус-векторов этих двух точек создаваемого вектора должно быть неизменным.

Поскольку длины радиус-векторов неизменны и равны радиусу сферы, то неизменным становится и синус угла между ними, то есть, угол. Такое определение, назначение длины вектора можно назвать угловой длиной вектора. На рисунке рис.3.2 приведён пример перемещения вектора А по поверхности сферы до совмещения его начальной точки с начальной точкой другого вектора – В.

Векторы А и В на рисунке образованы радиус-векторами сферы, каждый из которых задаёт точку на её поверхности. Например, вектор А начинается в точке сферы, определяемой радиус-вектором $r_1(x_1, y_1, z_1)$, а заканчивается в точке сферы, определяемой радиус-вектором $r_2(x_2, y_2, z_2)$. При любом перемещении этого вектора по поверхности сферы его длина остаётся неизменной, что обеспечивается неизменностью угла между радиус-векторами r_1 и r_2. Картину перемещения вектора А мы наблюдаем из пространства погружения, причём на рисунке нам видна внутренняя сторона поверхности сферы. Такой вид мы выбрали для того, чтобы были видны радиус-векторы r_1 – r_6. Между началами векторов А и В проводится обязательная единственная геодезическая, Принимаем, что при переносе по ней вектора А угол между ним и этой линией переноса был неизменным, то есть, перенос был эквиугловым.

Очевидно, что перемещение вектора А называть параллельным мы не имеем права – никаких параллелей здесь не просматривается. В качестве линии переноса мы могли бы выбрать произвольную линию, но мы используем правило – переносить только по геодезическим. Такой геодезической на рисунке является большой круг, проходящий через начальные точки векторов – r_1 и r_3. Понятно, что в процессе переноса вектор А мог вращаться вокруг своей начальной точки, но мы вновь придерживаемся правила:

угол между вектором А и линией переноса оставляем неизменным и равным его начальному значению. И теперь зададимся вопросом: есть ли какие-либо факторы, способные привести к разным значениям конечного угла между векторами А и В? Более того, сразу же после проведения геодезической между точками r_1 и r_3 нам становятся известны два угла: углы векторов А и В относительно линии переноса, геодезической.

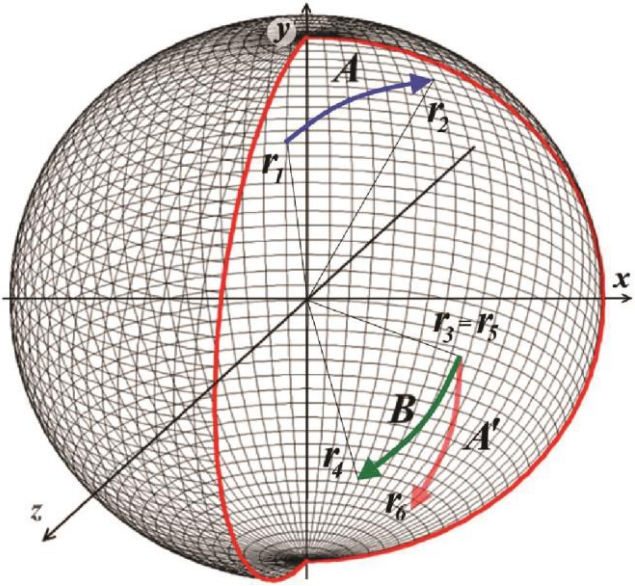


Рис.3.2. Перемещение вектора А по поверхности сферы в положение А' до совмещения его начала с началом вектора В. Длина вектора А при перемещении остаётся неизменной. Вид на поверхность сферы изнутри.

Система координат поверхности сферы является сферической, а пространства погружения – декартовой. Между сферическими и декартовыми координатами есть однозначная связь. Это позволяет аналитически определить параметры векторов, необходимые для их перемещения по поверхности сферы. Например, основной, неизменный па-

раметр векторов – их длину – мы установили, предопределили углом между его образующими радиус-векторами. И теперь очень важное замечание: сами эти радиус-векторы позволяют *однозначно* связать с образованным вектором его *направление*. Для этого в качестве направления вектора удобно использовать вектор, ортогональный к радиус-векторам рис.3.3. Для выбора из двух возможных, противоположных направлений этого вектора-направления можно использовать традиционное правило буравчика.

Для перемещения мы используем векторы, имеющие одну и ту же длину – угловую длину. Это значит, что все эти векторы имеют векторы направления так же одной и той же длины. Для удобства можно длину вектора направления *нормализовать*, то есть, принудительно пропорционально изменить декартовы координаты его конца таким образом, чтобы модуль вектора стал равен радиусу сферы. Начало вектора по определению находится в центре сферы.

Таким образом, любой вектор на поверхности сферы имеет однозначно определённое *условное* направление. Условным направлением мы его называем, потому что геометрически, визуально это направление не является *продолжением* своего вектора, указывает не туда, не в ту сторону, куда указывает стрелка вектора. Тем не менее, это *условное* направление изначально является для вектора *однозначным*, всегда *однозначно* меняет своё реальное направление при любом перемещении образующего вектора по поверхности сферы и во всех случаях имеет *однозначное* координатное описание, строго определённые значения координат. Иначе говоря, любой вектор на поверхности сферы имеет *длину* и *направление*.

Бесспорно, выглядит это странно, необычно. Вектор направления N на рис.3.3 ни с одним из "направляемых" векторов A, B, C, D и E не только не имеет общих точек, он

к тому же не принадлежит и поверхности сферы, так же не имея с нею общих точек, и не являясь, в том числе, касательным к сфере вектором. Вместе с тем, следует отметить важную особенность этого вектора направления. Все векторы на рис.3.3 *визуально* направлены в разные стороны. Кажется, что все они указывают в *разные* стороны. Конечно, это видимость из пространства погружения. Однако рассмотрим положение некоторого вектора на меридиане.

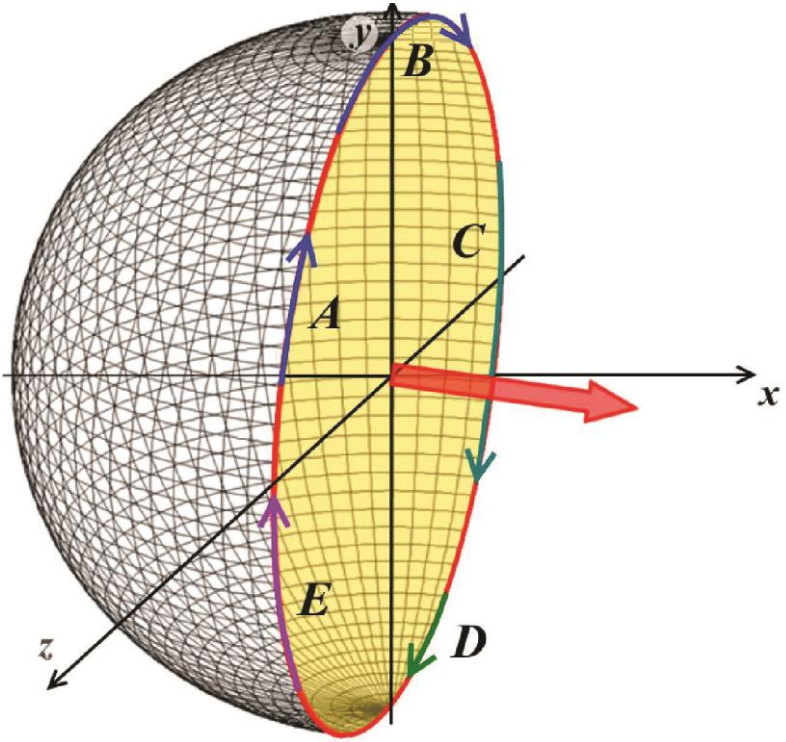


Рис.3.3. Векторы A, B, C, D и E направлены в одну сторону, в сторону, определяемую вектором направления N

Изначально он указывает, скажем, на север. Двигаясь в этом *направлении*, вектор доходит до северного полюса, по-прежнему указывая на него, на север. Но что произойдёт, когда вектор встанет точно на северный полюс? Если

считать, что магнитный полюс точно совпадает с географическим полюсом, то стрелка компаса в этой точке поведёт себя весьма странно: она будет указывать не на север или юг, а точно под ноги, встав строго вертикально. Но наш вектор в этот момент никуда не перемещался и, строго говоря, не менял своего направления. Более того, достаточно переместиться совсем незначительно, и стрелка компаса развернётся на 180 градусов. Стрелка компаса изменила своё направление, а наш вектор – нет. Вектор не изменил своего направления *физически*, то есть, если в его роли выступает, скажем, реальный, материальный указатель, стрелка на подставке, то этот указатель не вращался. Скажем, в некотором отдалении мы видим какой-то объект, на который направлен указатель. При смещении вектора на незначительное расстояние он по-прежнему будет направлен на этот указатель, но математически, географически теперь указатель-стрелка, вектор сменили своё направления ровно на 180 градусов. Не вращаясь, вектор развернулся на 180 градусов. Теперь он указывает не на север, а на юг. Конечно, всем понятно, что это географическая условность, вращение вектора при переходе через полюс – условность. Однако при движении вдоль экватора никаких подобных условностей не наблюдается. Вектор всегда будет направлен в одну и ту же сторону – на запад или на восток.

Этими двусмысленностью и условностями не обладает вектор направления N на рис.3.3. Всем векторам на рисунке он "назначил" одно и то же направление, которое неизменно при любых смещениях векторов вдоль соответствующей геодезической. При описанных обозначениях координат векторов через их сферические радиус-векторы любая задача о перемещении вектора имеет простое решение: в конкретных числовых обозначениях мы можем сравнивать любые векторы как по их длине, так и по их

направлениям. Разумеется, для такого сравнения необходимо установить, задать нулевые, *реперные* направления, в качестве которых можно использовать, например, те же декартовы координаты пространства погружения.

Разумеется, можно возразить. Во всех предыдущих рассуждениях мы решительно выступали против использования касательных пространств и векторов, поскольку они не принадлежат поверхности сферы, искривлённой поверхности. Тогда почему здесь, в рассматриваемой модели мы используем вектор, который не только не принадлежит искривлённой поверхности, но и с соотносимыми с ним векторами вообще не имеет общих точек. Выглядит как двойные стандарты.

Отчасти это возражение имеет основания. Но сравним связи векторов на поверхности с этими двумя объектами: вектором направления и касательными. Вектор направления всегда связан с интуитивно определяемым направлением вектора. При любом перемещении некоторого вектора по геодезической, его направление считается неизменным, и таким же неизменным остаётся и вектора его направления. Напротив, касательные вектора и касательные плоскости в этой же ситуации ведут себя, мягко говоря, странно. При перемещении вектора каждый раз они указывают на новое направление, куда-то "в небо". Даже на каждое частное направление вектора – на полюс или на запад-восток – эти касательные вектора явно не указывают. Более того, если вектор направления для всех векторов на геодезической один и тот же, то касательные для каждого вектора – собственные и, соответственно, отличаются друг от друга. Таким образом, очевидно, что информативность вектора направления в нашей модели более соответствует ситуации, нежели информативность касательных векторов.

С другой стороны, отсутствие общих точек у вектора на поверхности и вектора направления можно считать относительным. Оба вектора исходят с поверхности большого круга сферы, фактически являясь его производными. Эта общая природа векторов имеет как следствие и жёсткую, нерасторжимую аналитическую связь между ними.

Добавим, что данный формализм определения направлений векторов применим к любым искривлённым пространствам. Рассмотрим, например, волнообразную поверхность на рис.3.4. Вектор направления N заданного вектора A – это вектор, являющийся векторным произведением радиус-векторов $r_1(x_1, y_1, z_1)$ и $r_2(x_2, y_2, z_2)$ начала и конца, формирующих этот заданный вектор. Длина вектора направления N равна произведению длин радиус-векторов r_1 и r_2, умноженному на синус угла между ними. Из этого определения следует очевидный вывод: евклидов вектор, строго прямая линия не имеет сопутствующего вектора направления в выбранной нами сферической системе координат. Действительно, хотя для прямой линии мы можем обозначить длины радиус-векторов его концов бесконечной длины, но в евклидовом пространстве по определению они будут параллельными линиями, то есть, формально в этом случае угол между ними должен быть принят тождественно равным нулю. Отсутствие вектора направления в назначенных координатах следует считать признаком отсутствия кривизны пространства.

Однако на рис.3.4 мы видим, что на волнообразной плоскости вектор направления N вектора A в выбранной точке этой плоскости определённо не равен нулю. Возникает двусмысленная ситуация. Для обитателей на волнообразной двухмерной плоскости их мир является строго плоским, евклидовым. Никакими измерениями эти обитатели не смогут определить локальную кривизну своего

мира. Сумма углов треугольника всегда будет равна 180 градусам, а параллельный перенос вектора всегда будет сохранять его направление.

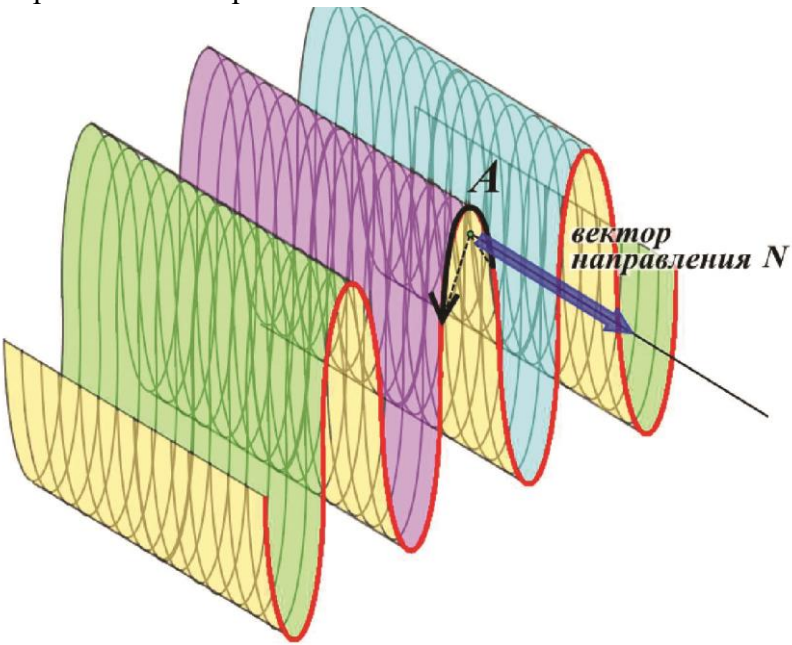


Рис.3.4. Волнообразная, "мятая" плоскость для внутреннего наблюдателя является плоской, для внешнего – искривлённой.

С другой стороны: в трёхмерном пространстве погружения мы явно видим, что эта волнообразная, "мятая" поверхность определённо искривлена. Также видно, что на этой двухмерной поверхности прямыми линиями, евклидовыми геодезическими являются *только* линии, расположенные поперёк волн.

Эти наблюдения высвечивают ещё одну весьма интересную проблему. Считается, что поверхности цилиндра и конуса – плоские, хотя и с некоторыми оговорками. Однако предложенная модель координат и способ построения

векторов на этих поверхностях приводят к неожиданному выводу: поскольку существует множество векторов, имеющих *ненулевой* вектор направления N, эти поверхности конуса и цилиндра являются на самом деле *искривлёнными*. На цилиндре этот вектор направления максимален вдоль оси цилиндра, а нулевым является только вдоль его радиуса.

Парадокс рецессии

Таким образом, процедура сравнения векторов сводится к двум операциям: a) измерению их длины, модулей и b) измерению их углов *относительно* геодезической, проходящей через их начальные точки. После этого производится простое сопоставление числовых или геометрических значений этих величин. Утверждение о невозможности такого сравнения, сопоставления является ошибочным. Тем не менее, рассмотренные утверждения о невозможности сравнения векторов получили довольно интересное расширенное толкование:

"В космологии ... очень заманчиво сказать, что галактики "удаляются от нас" со скоростью, определяемой их красным смещением. ... галактики не удаляются, поскольку понятие их скорости по отношению к нам четко не определено" [4, с.64], [3, с.104].

Утверждение, заметим, весьма радикальное, поскольку помимо вопросов перемещения векторов отвергает и фундаментальное положение теории Большого Взрыва. Формально заявлено, что Вселенная не расширяется. Правда, это утверждение входит в некоторое противоречие со следующим в цитате: "не удаляются", но "четко не определено". Нечёткое определение не может служить основанием для радикальной трактовки. Отрицание удаления галактик на основании *неопределённости* понятия об

их скорости относительно нас, наблюдателей, мы считаем ошибочным. Тем более что понятие относительной скорости в описанной ситуации мы считаем строго, чётко определённым.

Следующее далее в цитате пояснение этого расширенного толкования и радикальной трактовки об отсутствии *удаления* галактик выглядит не менее спорным, чем само толкование.

"На самом деле происходит то, что метрика пространства-времени между нами и галактиками изменилась (Вселенная расширилась) на пути фотона отсюда туда, что привело к увеличению длины волны света" [4, с.65], [3, с.104].

Конечно, наши возражения можно назвать лингвистическим спором. Тем не менее: следует ли отличать, различать, считать разными явлениями *увеличение* расстояния до галактик вследствие расширения Вселенной, пространства и их *удаление* от нас. В сущности это одно и то же, просто сказано разными словами.

"В качестве примера того, как вы можете ошибиться, наивное применение формулы Доплера к красному смещению галактик подразумевает, что некоторые из них удаляются быстрее света, что явно противоречит теории относительности" [там же].

Что же выходит? Использование эффекта Доплера, наблюдение красных и прочих смещений, космологические измерения скорости удаления галактик, скорости расширения Вселенной, присуждение нобелевской премии за открытие ускоренного расширения Вселенной, поиски тёмных материй и энергий, всё это впустую? Вовсе нет. Ссылка в цитате на теорию относительности в данном случае неверна. Галактики движутся, удаляются *условно*, гипотетически, визуально вследствие *расширения* про-

странства, поэтому никакого сверхсветового противоречия нет. Такое удаление галактик, включая якобы и сверхсветовое, как признаётся всеми, а косвенно далее отмечено и в цитате, не считаются реальным, *физическим* движением. Буквально, галактики *удаляются*, оставаясь *неподвижными*. Заметим, что галактики, удаляющиеся быстрее скорости света, не могут наблюдаться в принципе.

"Разрешение этого очевидного парадокса просто в том, что само понятие их рецессии не следует понимать буквально" [там же].

Да, действительно, удаление галактик, рецессию следует понимать с оговоркой, что физическим движением они не являются. В этой связи заметим, что такой подход к "неподвижному удалению" галактик заметно противоречит гипотезе о тёмной энергии, якобы "расталкивающей" галактики. Это расталкивающее *усилие* определённо означает приведение галактик в реальное, *физическое* движение, причём с ускорением. При таком подходе сверхсветовое разбегание галактик, противоречащее теории относительности, уже нельзя сбрасывать со счетов.

С другой стороны, *трактовке* процесса как рецессии, физического разбегания галактик это "неподвижное движение" не противоречит. Длина волны фотона увеличилась не просто так. Фотон движется к нам *строго* вдоль геодезической, являющейся наикратчайшей линией. Расстояние между галактиками *вдоль геодезических* увеличилось не мгновенно, а постепенно, что *эквивалентно движению* их относительно друг друга. Увеличение длины волны полученного нами фотона в точности соответствует скорости нашего "убегания" от него. Согласно трактовке эффекта Доплера, не имеет значения, кто от кого удаляется: источник от приёмника или приёмник от источника. Изменение, увеличение длины волны в этих двух ситуациях одно и то

же. Поскольку скорость фотона *неизменна*, увеличение длины его волны характеризует *только* скорость разбегания источника и приёмника.

Конечно, по большому счету применение формулы Доплера *следует* считать всё-таки несколько условным. Можно сказать, что доплеровские измерения определяют не *скорость* удаления галактик, а увеличение *длины* геодезической между ними и наблюдателями за время движения фотонов. При этом нет никаких оснований отвергать трактовку такого увеличения длины геодезической как скорости взаимного удаления объектов на её концах. Несмотря на *несущественную* условность этой трактовки, она даёт хорошие, осмысленные результаты через связь между расстоянием до источника по его яркости и увеличению длины световой волны.

Кроме того, к галактикам, якобы *удаляющимся* быстрее света, формула Доплера и не применяется, причём не потому, что *физически* это *движение* невозможно. Такие галактики не наблюдаемы, поэтому не существует в принципе и, соответственно, не регистрируется такое красное смещение, при котором скорость могла бы *трактоваться* как сверхсветовая.

Есть высказывания, что теория Большого Взрыва – плохая теория, но у нас нет ничего лучше (вообще-то, есть [79, с.9]). То же самое, видимо, можно сказать и о красном смещении и доплеровских измерениях. Вероятно, их обоснованность кому-то покажется недостаточной, однако общая картина реальности, созданная с их применением, строго взаимосвязана, непротиворечива внутренне и не противоречит наблюдениям. "Очевидный парадокс" рецессии является иллюзорным. Нет никакого парадокса, определение понятия скорости удаления галактик по от-

ношению к нам является чётким, определённым и в пределах доступной точности – однозначным.

Заключение

На искривлённых поверхностях не существует *параллельных* линий и, следовательно, никакой перенос вектора не может быть *параллельным*. Из этого прямо следует: *параллельный* перенос вектора в рамках пространства не может служить индикатором кривизны пространства, в частности, на поверхности сферы. Подобное несоответствие возникает и на поверхности Лобачевского. Это утверждение справедливо в отношении любой искривленной поверхности.

Любой перенос вектора, лежащего в плоскости, касательной к искривлённой поверхности, может свидетельствовать только об искривлении пространства погружения, то есть, пространства, в котором находятся как искривлённая поверхность, так и касательная плоскость с вектором. Параллельный перенос касательного вектора в E^3 пространстве погружения Евклида всегда сохраняет его направление. Такой касательный вектор не принадлежит искривлённому пространству и имеет с ним только одну общую точку – начало вектора.

Исследование кривизны пространства возможно с использованием эквиуглового перемещения вектора, то есть, его перемещения с сохранением угла относительно линии переноса. Линией переноса обязательно должна быть геодезическая. Если эта линия замкнута и не имеет излома, то вектор вернётся в исходную точку без поворота и точно совпадёт со своим исходным направлением. Если геодезическая переноса имеет излом, то вектор изменит своё направление на величину угла в точке излома геодезической, в точке её стыковки с другой геодезической.

Использование для переноса вектора произвольной, не геодезической линии, в том числе, путём аппроксимации произвольной линии бесконечно малыми отрезками геодезических, приводит к невозможности визуализации как параллельного, так и эквиуглового переноса.

Перенос вектора по произвольной замкнутой траектории или по разным путям с сохранением угла к линии переноса может привести к изменению его направления в любом пространстве, в том числе на плоскости Евклида.

На поверхности конуса геодезическая – евклидова прямая линия – может пересекать саму себя, то есть, быть замкнутой прямой линией с изломом. Перенос вектора по замкнутому контуру на такой плоской поверхности приведёт к его повороту.

В качестве линии разреза конуса для формирования его развёртки может использоваться как его образующая, так и любая, произвольная линия. Ошибочным является утверждение о принципиальной *невозможности* сравнивания векторов, что можно буквально трактовать как бессмысленность вообще каких-либо *недеформирующих* переносов векторов в пространстве. Утверждение о возникновении ошибок вследствие "наивного" применения формулы Доплера к красному смещению галактик само является ошибочным и наивным.

Ошибочным также является и утверждение о том, что галактики не удаляются от нас. Обоснованием этого "очевидного парадокса" рецессии явилось заявленное отсутствие четкого определения понятие их скорости по отношению к нам. Это заявление ошибочно: никакого парадокса нет. В среде космологов, астрономов определение понятия скорости удаления галактик по отношению к нам является чётким, определённым и в пределах доступной точности – однозначным.

Феномен конуса

При строгом подходе пространствами как таковыми не являются традиционно исследуемые искривлённые пространства: сфера, пространство положительной кривизны Римана, и пространство отрицательной кривизны Лобачевского, в частности, псевдосфера Бельтрами. Любое из подобных 2-мерных пространств имеет предел *размера* двухмерного объекта. В трёхмерном пространстве погружения, то есть, внешнем пространстве большего числа измерений, такие пространства фактически являются обычными трёхмерными телами, зачастую имеющими конечные значения площади поверхности и объёма. Как правило, самопересечений они не имеют.

Среди *плоских* пространств только плоскость Евклида не имеет таких ограничений, что, собственно говоря, и обеспечивает выполнение на ней пяти его постулатов. Наряду с такой *полной* плоскостью существуют и её частичные подобия: квадрат, цилиндр, куб, конус и некоторые другие, которые, однако, так же, как и упомянутые выше искривлённые пространства, являются конечными телами в 3-мерном пространстве погружения, пространстве большего числа измерений.

Для исследования конических поверхностей выберем две пересекающиеся прямые в бесконечномерном пространстве Евклида. Точку их пересечения S назовём полюсом или вершиной. Одну из прямых назовём осью a, а другую назовём образующей b. Меньший из углов между прямыми назовём половиной вершинного угла.

Приведём во вращение образующую b вокруг оси a. В *пространстве* возникнет фигура, тело – коническая поверхность.

"Конус – это пример двумерного многообразия с ненулевой кривизной ровно в одной точке. Увидеть это мы

можем, развернув его; конус эквивалентен плоскости с удаленным "дефицитным углом" и обозначенными сторонами..." [4, с.84].

Точкой с указанной ненулевой кривизной в нашем случае является вершина, полюс S. Разрежем поверхность образующей в одном из её положений при вращении и развернём на плоскости. Очевидно, величина "дефицитного угла" зависит от вершинного угла конической фигуры. В частном случае, при вершинном угле, равном π, дефицитный угол равен нулю и коническая поверхность полностью совпадёт с плоскостью Евклида. Если вершинный угол равен π/3, то дефицитный угол равен π, то есть, развёрнутая коническая поверхность в точности равна половине плоскости Евклида. При этом "точка кривизны" на её границе, стороне будет условна, определённого положения она иметь не будет.

Вариации конуса

Заметим, что перечисленные выше усечённые подобия полной плоскости Евклида: цилиндр, куб, тетраэдр фактически эквивалентны друг другу и являются производными от конического пространства, являющегося в свою очередь по характеристикам наиболее близким к *полному* пространству Евклида. Действительно, рассечём сформированную коническую поверхность двумя плоскостями на расстоянии h друг от друга, ортогональными к оси на расстоянии L от его полюса. Полученное тело называется усечённым конусом, который имеет две плоские грани. Очевидно, радиусы этих граней соотносятся как

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{L+h}{L}$$

Устремим вершину S в бесконечность, вдаль от этих граней, вследствие чего соотношение изменится

$$\frac{R_1}{R_2} = \lim_{L \to \infty} \frac{L+h}{L} = 1$$

В результате мы получаем усечённый конус, радиусы граней которого равны: $R_1 = R_2$. То есть, фактически мы получили цилиндр, являющийся в данном случае вариантом, фрагментом конической поверхности.

Если бы при формировании конической поверхности мы вращали образующую таким образом, что она "нарисовала" бы на гранях квадрат, то в этом случае при удалении полюса вдаль мы получили бы параллелепипед или, как вариант, куб.

Если же при формировании конической поверхности мы вращали бы образующую таким образом, чтобы она "нарисовала" на ближней грани равносторонний треугольник такой, что длина его сторон была бы равна удалённости его вершин от полюса, то в этом случае мы получили бы тетраэдр или равностороннюю пирамиду.

Коническая поверхность, конус обладает ещё одним замечательным свойством. Её сечение плоскостью даёт ряд замечательных линий в зависимости от угла между осью конуса и секущей плоскости. Это окружность, эллипс, парабола, гипербола, треугольник и прямая.

Дефицитный угол

Отметим некоторую неточность следующего утверждения, ссылающегося на предыдущую, приведённую выше цитату этого же автора:

"В метрике, унаследованной от этого описания как часть плоской поверхности, конус плоский везде, кроме вершины. Это можно увидеть, рассматривая параллельную транспортировку вектора по различным петлям; если цикл не охватывает вершину, не будет общего преобразования, тогда как цикл, который действительно охватывает вер-

шину (скажем, только один раз), приведет к повороту на угол, который является просто недостающим углом" [4, с.84]

Не следует делать из этого утверждения вывод, будто коническая поверхность тождественна плоскости Евклида в любой точке и на любом участке *кроме* вершины. На самом деле поверхность конуса плоская *только* в области, не содержащей прямо или косвенно вершину, полюс. Это ведёт к тому, что на конической поверхности в *таких* областях не выполняются некоторые из пяти постулатов Евклида. Например, параллельные линии пересекаются, если между ними находится полюс. Длина *любой* окружности радиуса R с полюсом внутри не равна $2\pi R$, а сама окружность имеет излом на линии, соединяющей её центр и полюс. Вместе с тем, такое искривляющее *влияние* полюса является локальным, оно не делает искривлённой поверхность конуса целиком. Более того, если полюс, вершина конуса окажется прямо на линии параллельного переноса, то поворота вектора не будет, то есть, сам полюс фактически не является "ровно одной точкой с ненулевой кривизной". Возникает довольно интересная, двусмысленная ситуация. Внутри большой области, *включающей, охватывающей* полюс, двухмерное пространство поверхности конуса формально выглядит как искривлённое, но любая её же часть, не содержащая полюса или содержащая его на границе, является плоской.

В литературе можно встретить утверждение, что внутренний (плоский) наблюдатель способен определить кривизну собственного пространства без привлечения понятия пространства большей размерности, так называемого пространства погружения:

"... внутренняя кривизна пространства-времени, т.е. кривизна, при определении которой не только не

используется погружение в какое-либо гипотетическое плоское многообразие более высокой размерности, но даже не допускается мысли о возможности такого погружения" [42, т.1, с.411].

В качестве одного из распространённых способов такого определения кривизны рассматривается явление поворота вектора при его параллельном переносе по замкнутому контуру:

"Кривизна многообразия сама по себе выражается через изменение направления вектора, возникающее при параллельном переносе вектора по небольшому замкнутому контуру. ... численное значение кривизны многообразия можно выразить через изменение направления вектора (в градусах) на единицу площади, охватываемой замкнутым контуром, по которому совершается обход" [16, с.82].

О чем же тогда свидетельствует поворот вектора при перемещении его по поверхности конуса? Формально этот поворот следовало бы рассматривать как свидетельство кривизны охваченного при обходе контура, поскольку при однозначно *параллельном* переносе вектора, тем не менее, явно наблюдается изменение его направления:

"Решающее различие между плоскими и искривлёнными пространствами состоит в том, *что в искривленном пространстве результат параллельного переноса вектора из одной точки в другую будет зависеть от пути, пройденного между точками"* [4, с.64], [3, с.104].

В общем случае, хотя и с некоторыми оговорками, это действительно так. Следует заметить, что и на определённо, достоверно *искривлённой* поверхности, на сфере можно найти такие *разные* траектории переноса между двумя точками, когда вектор не только принимает одно и то же направление, но и не меняет своего направления. Для ви-

зуальной демонстрации изменения направления вектора при его переносе по двум *разным* путям, такое его "решающее" перемещение, как правило, производится по поверхности сферы:

"Начните с вектора на экваторе, направленного вдоль линии постоянной долготы. Параллельно перенесите его до северного полюса по долготе очевидным способом. Затем возьмите исходный вектор, перенесите его параллельно экватору на угол θ, а затем переместите его вверх к северному полюсу, как и раньше. Ясно, что вектор, параллельно перемещённый по двум путям, прибыл в один и тот же пункт назначения с двумя разными значениями (повернутыми на угол θ)" [4, с.64], [3, с.104].

Делается очевидное заключение, что два параллельных в начальной точке вектора прибыли в конечную точку повёрнутыми относительно друг друга. Однако эта ясность ошибочна. Сначала несколько замечаний, возражений. Вектора изображаются на подобных иллюстрациях неточно, а правильнее сказать, ошибочно. Во-первых, они не могут быть *прямолинейными* отрезками на поверхности сферы. На всём пути к полюсу они должны совпадать с соответствующими линиями, дугами больших кругов. Во-вторых, они не могут выходить за поверхность сферы, как нередко изображается. Наконец, на сфере вообще не существует *параллельных* линий, то есть, параллельный перенос невозможен в принципе.

Как правило, для доказательства изменения направления вектора при его *якобы* параллельном переносе используется треугольный путь: точки на экваторе – полюсе – экваторе. Вообще-то, это довольно странный, чрезмерно замысловатый способ определения кривизны. Для доказательства кривизны поверхности было бы вполне достаточно просто вычислить сумму углов этого треугольника.

Она, как легко заметить, для сферической поверхности всегда превышает 180 градусов, что сразу же, по определению означает кривизну поверхности.

Перенос же вектора можно произвести и по другим путям. На следующем рисунке изображены два таких пути: по Z-образной ломаной линии и по экватору. Очевидно, что по обоим путям векторы прибывают из точки A в точку D с сохранением направления. Оба вектора в конечной точке сливаются.

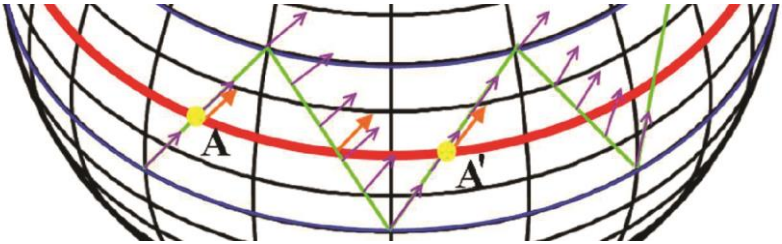


Рис.1. При параллельном переносе на сфере вектора из точки A в точку D по двум разным путям его направление сохраняется

На этом рисунке, на сфере углы между линиями просматриваются не очень хорошо. Сделаем развёртку этого фрагмента сферы на плоскость. Развёртка несколько условна, поскольку предполагает небольшую, но не принципиальную деформацию сферического фрагмента.

Каждый меридиан пересекает каждую параллель и экватор под прямым углом. Пути векторов – Z-образный и экватор – являются прямыми линиями, то есть, отрезками больших кругов сферы. На эквивалентной развёртке рисунка видно, что по экватору вектор, выделенный желтым цветом, перенесён параллельно, без поворота. Вторая линия переноса является составной, ломаной линией. Эта линия сформирована специфическим образом. В точках

излома она образует угол в 45 градусов с проходящим через эту точку меридианом.

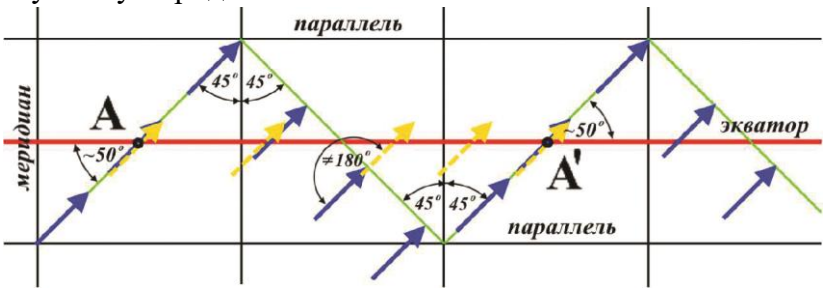


Рис.2. Развертка: При параллельном переносе на сфере вектора из точки A в точку D по двум разным путям его направление сохраняется

Следовательно, угол между участками линии – прямой. На первом отрезке линии от точки A до точки B вектор, изображённый синим цветом, совпадает с этой линией, геодезической, фрагментом большого круга. Далее, от точки B до точки C вектор переносится "параллельно", а правильнее говоря, с сохранением угла, относительно другой геодезической – BC, фрагмента большого круга, перпендикулярно к ней. В точке C вектор вновь переходит на другой фрагмент линии, геодезическую CD. Поскольку угол остаётся неизменным, то вектор оказывается коллинеарным этой геодезической, параллелен ей. Понятно, что в точку D вектор приходит с таким же уклоном, как и в точке A, то есть, его направление совпадает с вектором, перемещённым по экватору. Это прямо следует из симметрии рисунка. Отметим, что в промежуточном положении на экваторе между точками B и C векторы, переносимые по разным путям, не совпадают. Также в начальной A и конечной D точках вектора имеют наклон к экватору, не равный 45 градусам.

Заметим, что таких *эквивалентных* путей переноса без поворота вектора существует бесчисленное множество. Если назвать описанную ломаную траекторию z-траекторией, то несколько таких z-траекторий могут быть соединены в замкнутый контур. В этом случае нарушается правило "переноса по замкнутой траектории на искривлённой поверхности". Вектор при таком перемещении вернётся в исходную точку без поворота. С точки зрения трёхмерного пространства погружения на рисунке нет ни одной пары параллельных векторов.

Иногда рассматривается перенос вектора по сфере или просто искривлённому пространству по *произвольной*, не геодезической замкнутой линии *с сохранением относительного угла, эквиугловое* перемещение и демонстрируется его поворот. Легко показать, что *эквиугловое* перемещение вектора в *плоском* пространстве, например, поверхности куба на таких же условиях "сохранения" угла в общем случае также ведёт к его повороту. Поэтому корректным следует считать *только* перенос, перемещение вектора по прямым, геодезическим линиям. Собственно *параллельный* перенос по сфере невозможен в принципе, просто ввиду полного отсутствия на ней каких-либо *параллельных* прямых, геодезических.

Главный вывод из рассмотренного рисунка состоит в том, что перенос вектора по *геодезической* с сохранением относительного к ней угла, *эквиугловое* перемещение не является вращающим. Напротив, любые "обходные" пути, в частности, через полюс по определению являются вращающими и могут рассматриваться как доказательство кривизны для *частного* случая.

Рассмотренная *традиционная* модель параллельного переноса вектора на сфере через полюс или по сторонам треугольника послужила основанием для довольно стран-

ного заключения об относительной скорости частиц в искривлённом пространстве:

"В отличие от некоторых проблем, с которыми мы столкнулись, у этой проблемы нет решения – мы просто должны научиться жить с тем фактом, что два вектора можно сравнивать естественным образом, только если они являются элементами одного и того же касательного пространства" [4, с.64], [3, с.104].

Заметим, что на сфере таких векторов быть не может вообще. Кроме того векторы в касательном пространстве не принадлежат пространству искривлённому, поскольку векторы в них имеют с "касаемыми" лишь одну общую точку и ничего более. А точка, понятно, вектором не является, сколько бы касательных пространств, плоскостей мы ни построили.

"Например, две частицы, проходящие мимо друг друга, имеют четко определенную относительную скорость... Но две частицы в разных точках изогнутого многообразия не имеют четко определенного понятия относительной скорости – это понятие просто не имеет смысла" [4, с.64], [3, с.104].

В целом вся цитата выглядит как подмена понятий, как странное, бездоказательное постулятивное утверждение: "не имеют чётко определённого понятия *относительной* скорости" (курсив в цитате наш). Заметим, что фраза "относительную скорость, которая не может быть больше скорости света" – сама является "относительным утверждением". В любой ИСО два фотона могут удаляться друг от друга с *относительной удвоенной* скоростью света. Согласно кинематике всех ведущих теорий, галилеевой, эйнштейновой, *любые* скорости – относительные. Смысла не имеют как раз *абсолютные* скорости. Но в этом случае отрицание относительной скорости в цитате лишает

смысла понятие скорости как таковой. Видимо, следовало бы сказать, что мы не можем *измерить* отношение этих скоростей, но это тоже неверно. В плоском двухмерном пространстве относительная скорость определяется изменением длины *наименьшего* расстояния между объектами за единицу времени, то есть, скорость изменения длины геодезической. Очевидно, что не имеют никаких физических запретов ни измерение интервала времени, ни измерение длины геодезической в любой момент времени.

Кривизна пространства таким измерениям так же не препятствует. Как показано на рисунках рис.1 и рис.2 выше, в *сферическом* пространстве мы всегда можем для измерения и сравнения переместить *мгновенный* вектор скорости в любую точку без его искажения. То есть, решение есть, и эта проблема параллельного переноса проблемой не является. В искривлённом пространстве относительная скорость частиц по-прежнему имеет чёткое определение. Во всяком случае, его нельзя опровергнуть противоречивыми выводами о повороте переносимого вектора. Решающим возражением может быть вопрос, как мы можем определить именно этот, неискажающий путь? Ответ столь же решающий: осуществляйте по сфере *эквиугловое* перемещение вектора *относительной* скорости по прямой линии, по *геодезической*, с сохранением угла к ней, который, как следует предположить, *просто равен нулю*, поскольку относительная скорость между двумя точками *всегда* направлена вдоль геодезической, соединяющей их.

Конечно, можно возразить, что такому подходу противоречит круговое движение, ведь в этом случае длина геодезической между двумя точками неизменна, но скорость *относительного* движения явно просматривается [80, с.31]. Однако здесь мы рассматриваем две *математические, безмассовые, безразмерные* точки, *круговое* от-

носительное движение которых друг относительно друга в *физическом мире* невозможно. В пустом пространстве круговое движение возможно только при наличии сил, эквивалентных гравитации или электростатике. Понятно, что к рассматриваемой модели это отношения не имеет. Исходя из этого, точно так же следует отвергнуть и следующий, космологический вывод:

"В космологии ... очень заманчиво сказать, что галактики "удаляются от нас" со скоростью, определяемой их красным смещением. ... галактики не удаляются, поскольку понятие их скорости по отношению к нам четко не определено" [4, с.64], [3, с.104].

Отрицание удаления галактик на основании *неопределённости* понятия об их скорости относительно нас, наблюдателей, мы считаем ошибочным. Тем более с опорой на *ошибочные* выводы о повороте вектора при параллельном переносе. Геодезическая, соединяющая галактику и наблюдателя, является кратчайшей *прямой* линией в любом искривлённом пространстве. Любой переносимый по ней и совпадающий с нею вектор всегда *условно* параллелен ей, поэтому ни о каком его повороте говорить нельзя. Следовательно, вектор скорости фотона, испущенного галактикой и поступившего к нам, не испытал никакого изменения *направления*.

"На самом деле происходит то, что метрика пространства-времени между нами и галактиками изменилась (Вселенная расширилась) на пути фотона отсюда туда, что привело к увеличению длины волны света. В качестве примера того, как вы можете ошибиться, наивное применение формулы Доплера к красному смещению галактик подразумевает, что некоторые из них удаляются быстрее света, что явно противоречит теории относительности. Разрешение этого очевидного парадокса просто в том, что

само понятие их рецессии не следует понимать буквально" [4, с.65], [3, с.104].

Здесь согласиться можно лишь с тем, что, действительно, удаление галактик, рецессию следует понимать с некоторыми оговорками. Галактики движутся, удаляются *условно*, гипотетически, визуально, вследствие *расширения* пространства-времени. При этом никакого сверхсветового противоречия нет, поскольку такое удаление, как признаётся всеми, а косвенно отмечено и в цитате, не считаются реальным, *физическим* движением. Буквально, галактики удаляются, оставаясь неподвижными. Тем не менее, *трактовке* процесса как рецессии, физического разбегания галактик это "неподвижное движение" не противоречит. Длина волны фотона увеличилась не просто так. Фотон движется к нам *строго* по геодезической, являющейся наикратчайшей линией. Расстояние между галактиками *вдоль геодезических* увеличилось не мгновенно, а постепенно, что *эквивалентно движению* их относительно друг друга. Кроме того, если углубиться в философские трактовки и в физически несостоятельное, противоречивое понятие "гравитационной связанности", то увеличение дистанции между двумя гравитационно притягивающимися объектами явно требует приложения к ним некой силы. Источник силы отнесём к философским домыслам, но её наличие – физическая неизбежность. Почему объекты не "ощущают" действия этой силы? Вообще-то, ощущают, наблюдают и измеряют – красное, доплеровское смещение, определённо является индикатором *движения* с ускорением. Конечно, несомненно, по большому счету применение формулы Доплера *следует* считать всё-таки достаточно условным. Можно сказать, что доплеровские измерения определяют не *скорость* удаления галактик, а увеличение *длины* геодезической между ними и наблюдателями за

время движения фотонов. Но, несмотря на эту условность, она даёт хорошие, осмысленные результаты через связь между расстоянием до источника по его яркости и увеличению длины волны. Кроме того, к галактикам, якобы *удаляющимся* быстрее света, формула Доплера и не применяется, причём даже не потому, что *физически* это *движение* невозможно. Такие галактики не наблюдаемы, поэтому не существует в принципе и, соответственно, не регистрируется такое красное смещение, при котором скорость могла бы *трактоваться* как сверхсветовая. Есть высказывания, что теория Большого Взрыва – плохая теория, но у нас нет ничего лучше (вообще-то, есть [79, с.9]). То же самое, видимо, можно сказать и о красном смещении и доплеровских измерениях.

Таким образом, можно сказать, что поворот вектора при его параллельном переносе является определённо слабым и спорным *индикатором* кривизны или аномалий поверхности. При *спорно* параллельном переносе по разным путям его направление может как меняться, так и сохраняться. При этом пространство, в котором он переносится, может быть как искривлённым, так и плоским, пусть и ограниченным, замкнутым, например, коническим.

Загадки конуса

Рассматривая геометрическую "конструкцию" конуса, можно заметить, что она, в общем-то, не уникальна. Приём склеивания граней плоских участков используется довольно часто. Например, таким способом и с использованием "отождествления" сторон квадрата или прямоугольника формируется *деформированная* тороидальная поверхность. Куб также является продуктом склеивания сторон, граней, например, крестообразной поверхности [79, с.129]. Кстати, при этом куб может рассматриваться, как

своеобразная "огранённая" сфера, имеющая чётко выраженные полюса – восемь вершин. Как следствие, на такой "плоской" поверхности вектор, перенесённый строго *параллельно* по определённым путям, возвращается в исходную точку с поворотом. Кубу, как и в случае с конусом, следует "назначить", правда, не одну, а "ровно восемь точек с ненулевой кривизной". У тетраэдра таких точек, соответственно, "ровно четыре".

Склеивание граней плоских фигур можно производить также с их вращением, поворотом, например, как в ленте Мёбиуса. Склеивание изначально параллельных граней даёт классическую форму ленты. Перенос вектора вдоль оси ленты не приводит к его повороту, то есть, лента Мёбиуса *математически* является строго плоской поверхностью, хотя и замкнутой, односторонней. Понятно, что расширение такого "пространства" неизбежно ведёт его к самопересечению. Можно назвать её "вывернутым" цилиндром, либо, вполне возможно, "вырезкой" части поверхности бутылки Клейна. Правда, отсутствие поворота вектора при переносе по ленте Мёбиуса отвергается в фейнмановских лекциях, что мы считаем ошибкой:

"Если мы возьмем два вектора, один из которых параллелен, другой перпендикулярен центральной линии ленты Мебиуса, и обойдем один раз ленту, двигаясь налево от вертикальной пунктирной линии, показанной рис.9.3, то пространство не переходит само в себя, а испытывает отражение, обусловленное "скрученностью" поверхности, а не просто поворот" [64, с.195].

Обратим внимание на важное замечание в цитате: "обойдём один раз". И сразу же зададимся вопросом: а как определить, сколько раз мы обошли ленту? Если мы движемся по ней, то кроме этого пространства Мёбиуса мы не видим ничего. Для внешнего наблюдателя всё просто: один

раз – это круговой обход в 360 градусов. Однако, для внутреннего наблюдателя, для нас этот круговой угол для наблюдения *недоступен*. Кроме того, лента может быть очень длинной и многократно свёрнутой кольцами.

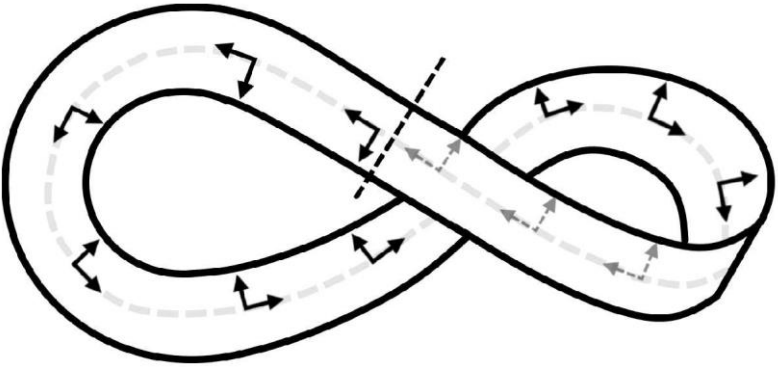


Рис.3. Рисунок 9.3 из работы [64, с.195]

Конечно, через некоторое время мы можем обнаружить по неровностям или каким-либо меткам на ленте, что здесь, в некоторой точке мы уже были. Для контроля пройденного пути простейшим и наглядным способом является движение с *закрашиванием* пройденной поверхности, дороги, своеобразная нить Ариадны. Но, очевидно, после прохождения одного круга мы обнаружим перед собой не закрашенную поверхность.

Конечно, если лента прозрачна, под ногами мы увидим краску... но на обратной стороне. Сказать, что мы прошли полный путь, мы не имеем права: мы не находимся в *исходной* точке. Если в исходной точке мы оставили какой-то предмет, то здесь взять его мы не сможем: он находится "под полом".

Из этого следует, что полным путём является всё-таки путь по удвоенной, объединённой, вновь сформированной поверхности. Такое свойство "удвоения" длины ленты используется, например, в технике. На распилочных станках

ленточная пила нередко имеет заточку, зубья на обеих кромках. Такая "удвоенная" лента-пила и работает в два раза дольше.

С учетом этого расширения, удвоения пространства продолжим путь и закрашивание ленты. Пройдя такое же расстояние, мы вернёмся в исходную точку и теперь уже сможем поднять оставленный в ней предмет. Перед нами теперь уже будет ранее закрашенная нами поверхность. При этом мы обнаружим, что рассмотренный переносимый вектор в точности совпал со своим исходным направлением. Ещё раз повторим: *математическая*, а не реальная физическая лента Мёбиуса является полноценным плоским пространством, хотя и замкнутым.

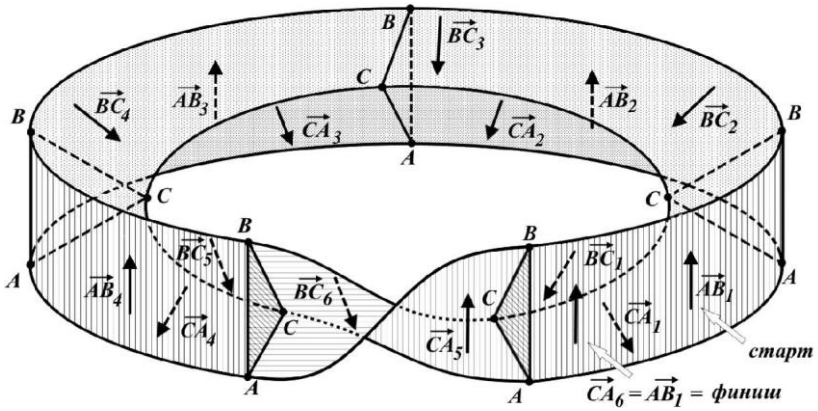


Рис.4. Трёхгранное подобие ленты Мёбиуса. При перемещении вектора по всём трём граням, он возвращается в исходное положение

Такое сохранение направления переносимого вектора – это общее свойство пространств, подобных ленте Мёбиуса. Рассмотрим, например, длинную гибкую балку треугольного сечения. Свернём её в кольцо и соединим, отождествим торцевые грани, повернув одну из них на треть. Мы получим треугольное подобие ленты Мёбиуса.

Для простоты будем считать, что рёбра балки непреодолимы. Такая поверхность делает более наглядным "продолжение" перевернутого, скрученного пространства. Легко заметить, что и здесь при переносе вектора, после трёх кругов он вернётся в исходное состояние, никакого поворота не будет.

Рассмотрим по шагам перенос вектора на рисунке. Исходный вектор AB_1 направлен от ребра А к ребру В. Следующие его положения – векторы AB_2, AB_3 и AB_4. В точке перекручивания трехгранной балки вектор AB_4 переходит в вектор BC_1, поскольку ребро А переходит в ребро В, а ребро В, соответственно, в ребро С. Формально мы прошли путь, равный длине исходной балки, но физически, ни в каком смысле мы не оказываемся в исходной точке. Исходная точка находится где-то далеко в стороне.

Далее по переименованной или, точнее, смещённой грани вектор перемещается, как показано на рисунке через положения BC_2, BC_3, BC_4, BC_5 и BC_6. В той же точке перегиба балки эта грань ВС переходит в грань СА или, соответственно, ребро В переходит в ребро С, а ребро С – в ребро А. И вновь, пройдя путь, равный длине балки, мы не вернулись в исходное положение. Оно по-прежнему находится где-то далеко в стороне.

На этой смещённой грани вектор вновь меняет обозначение: из BC_6 он должен быть переименован в CA_1 и, соответственно, далее проходит положения CA_1, CA_2, CA_3, CA_4, CA_5 и CA_6, что достаточно легко отследить по рисунку. Там же видно, что грань СА в точке перегиба вновь должна быть переименована, поскольку она переходит в грань АВ, поскольку рёбра С и А переходят в рёбра А и В, соответственно. Вектор CA_6 при таком переходе оказывается параллельным вектору AB_1, то есть, при полном об-

ходе всех трёх граней, слившихся в одну сплошную, вектор вернулся в исходное положение, направление $CA_6 = AB_1$.

Собственно говоря, это должно быть очевидно: каким бы ни было смещение, поворот, перекручивание балки вокруг оси, вектор *всегда* направлен в одну сторону относительно направления переноса: либо по часовой, либо против часовой стрелки. На наш взгляд рассмотренный пример показывает, что исследователи зачастую, так сказать, чрезмерно "формально используют формализм" математических теорий.

Следует отметить, что на самом деле наша треугольная балка при скручивании испытает некоторую деформацию, то есть, её грани не будут полноценными плоскостями. Однако таким же свойством обладает и лента Мёбиуса. Попытка свернуть в неё упругую металлическую ленту вызовет помимо изгиба её *деформацию*, вызывающую отчётливое сопротивление скручиванию. По этой причине выше мы назвали ленту Мёбиуса *математической*, в отличие от реальной физической ленты.

Сечения конуса

Коническая поверхность образуется, очевидно, не только скручиванием, сворачиванием участка плоскости – можно также просто *отождествить* грани "дефицитного", недостающего угла. Для внутреннего "плоского" наблюдателя оба варианта эквивалентны. При этом в процессе параллельного переноса вектора по такой поверхности он будет испытывать поворот, равный величине этого недостающего, дефицитного угла. Если вырезать на плоскости угол, максимально близкий к 2π, то вернувшийся вектор будет предельно совпадать с исходным. Такой "конус", как легко заметить, фактически является цилиндром, правда, с радиусом, приближающимся к нулю.

А что произойдёт, если заменить недостающий, "дефицитный угол" на "чрезмерный угол"? То есть, не вырезать на плоскости некий угол, а, что называется, "вставить клин"? В принципе, ничто не запрещает такую процедуру. Очевидно, развёртку такой поверхности "разложить" на плоскости будет невозможно. Но и это не является проблемой, ведь, поверхность сферы тоже невозможно "разложить" на плоскости без деформации. В обоих случаях развёртки будут "выпуклыми". Поверхность с "вставленным клином" мы будем называть *инверсным конусом*, поскольку способ её создания в точности совпадает со способом создания обычного конуса.

В отличие от традиционного "прямого" конуса, клин для инверсного конуса может иметь любое значение. Одним из простейших и весьма интересных вариантов является инверсный конус с углами исходной поверхности и клина, равными 2π. Способ построения такого инверсного конуса достаточно прост.

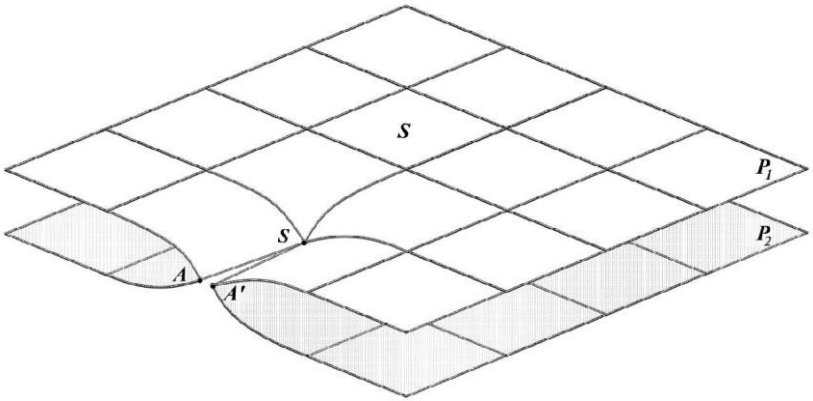


Рис.5. Склеивание инверсного конуса из двух плоскостей

Приложим друг к другу две плоскости P_1 и P_2. Проткнём их перпендикулярной линией и традиционно назовём точку их пересечения полюсом S. Рассечём плоскости

третьей плоскостью в бесконечность от полюса S. Отождествим или склеим образовавшиеся на плоскостях близлежащие границы SA и SA'. На рисунке плоскости слегка удалены друг от друга, чтобы построения были более наглядны. Мы получили инверсный конус с дополнительным, "чрезмерным углом" или "клином", равным 2π. Полный угол поверхности такого конуса вокруг полюса, соответственно, равен 4π.

В полученном виде инверсный конус мало похож на конус вообще, поэтому для наглядности сложим "гармошкой" обе плоскости с периодом 45 градусов. В итоге мы получим фигуру, объёмное тело следующего вида:

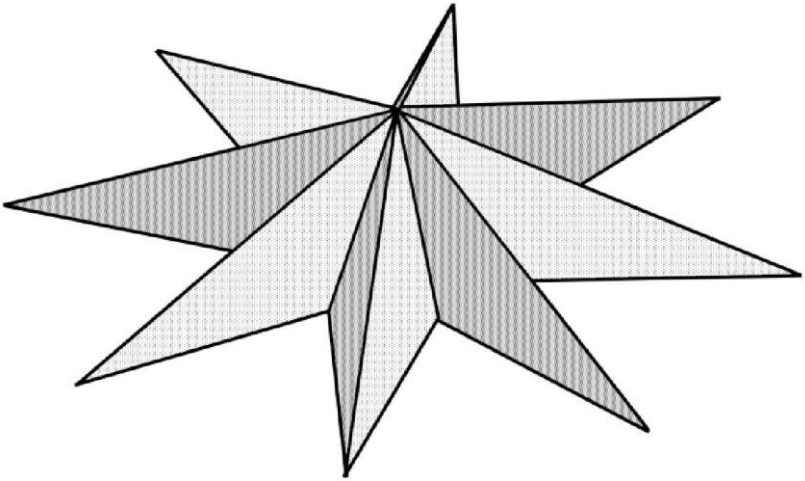


Рис.6. Конус "инверсный" с *дополнительным* углом 2π. Полученная коническая поверхность изображена в звездоподобном виде с прямолинейными перегибами с периодом $\pi/4$

Поверхности рис.5 и рис.6 тождественны. И вновь, для того чтобы разглядеть конус в этой звездоподобной фигуре, видимо, следует немного напрячь воображение. Если заменить острые грани такого конуса плавно изо-

гнутой поверхностью, то в этом случае такой "конус" выглядит уже более похожим на конус:

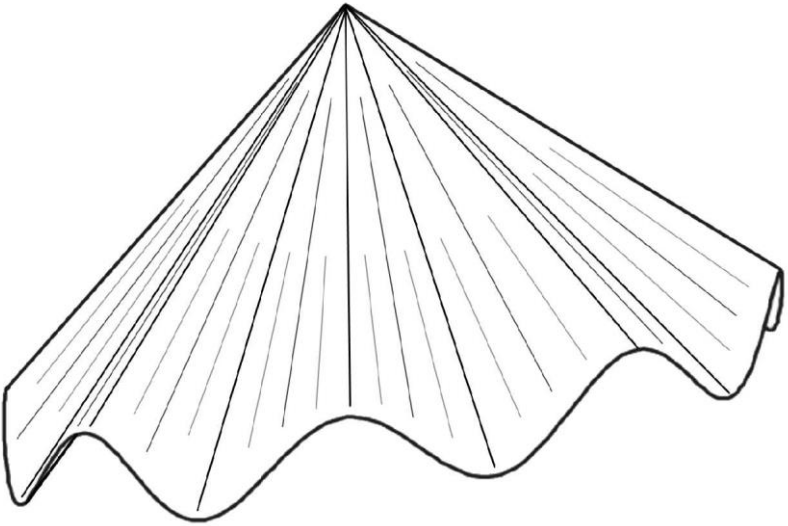


Рис.7. Конус с *дополнительным* углом 2π. Поверхность изображена с волнообразными перегибами с периодом $\pi/4$

Подчеркнём: фигуры рис.5, рис.6 и рис.7 – это одна и та же двухмерная "коническая" плоскость, различающиеся лишь способом изгибания или "сминания", отметим это особо: без деформаций, разрывов и растяжений. Такой расширенный конус обладает рядом интересных свойств. Главное – это то, что в трёхмерном пространстве Евклида эта поверхность имеет площадь, превышающую в 2 раза площадь любой плоскости, что, собственно, видно из способа её получения. Это относится лишь к рассмотренной конической поверхности. Заметим, что возможны и другие "смятые" *без деформаций* плоскости Евклида, которые в пространстве погружения также имеют бесконечную площадь, превышающую площадь обычной, "гладкой" плоскости. Определить кривизну такой поверхности внутрен-

ний, "плоский" наблюдатель не сможет никакими измерениями или переносами векторов – она евклидово плоская.

К рассматриваемой конической поверхности мы можем добавить любое количество дополнительных углов, клиньев, вплоть до бесконечности. В этом случае все лучи звезды рис.6 сольются в сплошное тело. Двухмерное пространство такого инверсного конуса будет иметь вид сплошного тела – конуса, выглядящего как 3-мерный объект. Однако этот объект на самом деле "пористый". Любая двухмерная область в нём эквивалентна обычной плоскости Евклида, на которой выполняются его 5 постулатов, если область не включает в себя полюс. В противном случае возникнут столь же странные явления, как и на обычном конусе. Например, окружность с центром на полюсе будет иметь угловой размер 2π, умноженное на количество дополнительных углов, клиньев плюс один – исходный. То есть, приведённый на рисунках конус даст окружность с внутренним углом в 4π. Попытка построить квадрат вокруг полюса приведёт к созданию прямоугольного многоугольника, имеющего 8 *прямых* углов. При этом *параллельный* перенос вектора вокруг полюса по замкнутой линии, состоящей из геодезических, не приведёт к его повороту при возврате в исходную точку.

Заметим, что обычный конус с "дефицитным" углом так же имеет специфические особенности. На нём постулаты Евклида справедливы лишь на ограниченных участках, не включающих в себя полюс. Особенно наглядными являются особенности конусов с дефицитными углами, кратными прямому. На поверхности конуса с дефицитным углом 90 градусов в области с полюсом треугольник имеет три прямых угла, как на поверхности сферы. Можно назвать такой конус "плоской полусферой". Параллельные линии, между которыми полюс, пересекаются под прямым

углом. Соответственно, окружность с центром на полюсе имеет внутренний полярный угол, равный 270 градусам, а не обычным 360.

На поверхности конуса с дефицитным углом, равным π, параллельные линии параллельны везде, но перпендикулярные пересекаются дважды. То есть, две прямые линии образуют ограниченную область с двумя прямыми углами – "прямоугольный двухугольник". Окружность с центром на полюсе имеет внутренний полярный угол, равный π, а не обычные 2π.

Наконец, на поверхности самого острого конуса с дефицитным углом 270 градусов, прямая линия пересекает себя саму под прямым углом – прямоугольный "одноугольник". Параллельный перенос вектора на поверхностях таких конусов, охватывающий полюс, приводит к их повороту.

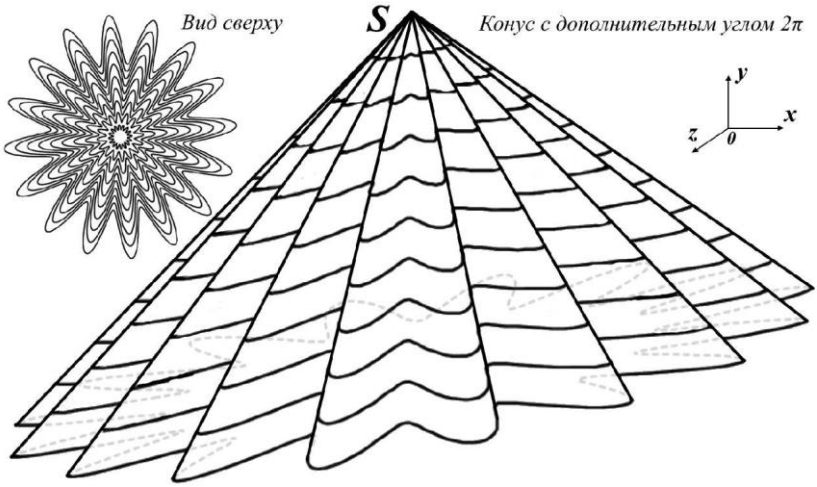


Рис.8. Конус с дополнительным углом 2π. Поверхность изображена с волнообразными перегибами с периодом π/8 и плоскими сечениями, параллельными основанию конуса

Приведём ещё один вариант изображения "инверсного" конуса с клином 2π и более мелкими изгибами, складками поверхности. Изгибы сделаны синусоидальными, а на поверхности конуса нанесены концентрические окружности с центром в полюсе – рисунок рис.8.

Штриховой линией показана невидимая часть самого нижнего "кругового" сечения конуса, его основание. Слева вверху рисунка приведён вид сверху на этот конус с 16 изгибами – его осевые сечения, слои – своеобразные концентрические "окружности". Такой конус может быть построен описанным выше способом – вращением образующей вокруг оси, когда какая-то точка образующей описывает волнообразную линию, вписанную в окружность.

Точно так же, тождественно выглядят три версии конуса: с достаточно малым, например, равным 1 секунде недостающим или избыточным углом, и "конус" вообще без вырезанного или добавленного угла, то есть, свернутая в конус обычная плоскость. Каждая из волнообразно деформированных *окружностей*, сечений этих конусов имеет классический угол, приблизительно равный 2π.

Однако подобный аксонометрический вид и вид сверху будут иметь "конусы" и с любым другим добавленным углом и соответствующими окружностями сечений, превышающими 2π. Разница будет лишь в высоте волновых изгибов.

Перенос вектора

Перенос вектора по *плоской* поверхности конуса с избыточным углом, кратным 2π, не приводит к его повороту даже для контура, охватывающего полюс конуса. Любой другой избыточный угол ведёт к повороту вектора. Покажем это на простейшем варианте конуса, с избыточным углом, равным π/2. Для наглядности изобразим конус в

развёрнутом виде, в виде состыкованных, склеенных кусков плоскостей.

Фигура рис.9 может быть свёрнута без искажений в фигуру конического вида рис.6, рис.7 или рис.8. Отметим, что при переносе вектора на рис.9 мы использовали только евклидовы *прямые* линии и повороты на 90 градусов. При этом на плоскости для его внутреннего наблюдателя, "плосковитянина" была нарисован прямоугольный пятиугольник, пятиугольная фигура, все внутренние углы которой – прямые. Следовательно, сумма внутренних углов этой фигуры равна 450 градусов. На действительно евклидовой плоскости такой многоугольник невозможен. Хотя рассмотренная на рисунке поверхность определённо выглядит плоской, традиционный "индикатор" – параллельный перенос по замкнутому контуру вектора, вернувшегося в исходную точку с поворотом – свидетельствует о её кривизне.

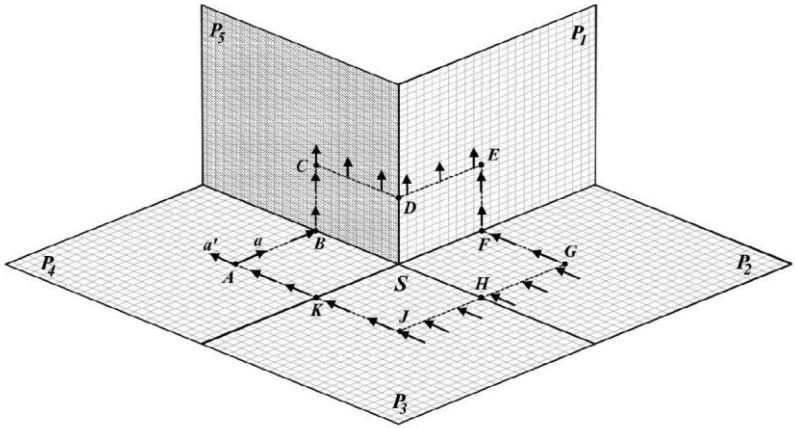


Рис.9. Перенос вектора по замкнутому контуру на поверхности конуса с добавленным углом π/2, фрагментом плоскости S_5

Не менее странная ситуация возникает на поверхности конуса с дополнительным углом 2π, показанного на рис.6, рис.7, рис.8. Теперь уже параллельно перенесённый вокруг полюса вектор возвратится в исходную точку *без поворота*. То есть, такую поверхность следовало бы признать однозначно плоской. Собственно, таковой она является для локальных *бесконечных* областей, имеющих полюс только на границе. В этих областях выполняются все без исключения постулаты Евклида. Однако и здесь фигура, образованная прямыми линиями с поворотом только на 90 градусов и содержащая внутри полюс, будет иметь восемь прямых внутренних углов, то есть, суммарно 720 градусов. Это же относится и к окружности с центром в полюсе: её полный внутренний угол также равен 720 градусам, против 360 градусов у обычной евклидовой окружности. Все точки этой окружности находятся на одном и том же удалении от полюса, вершины конуса.

Так же легко обнаружить, что на таких конических поверхностях возможны только *локальные декартовы* системы координат. В *глобальной декартовой* системе координат на поверхности имеется множество точек только с *одной* координатой. Непротиворечивой *глобальной* системой координат является полярная с центром на полюсе. В этой системе полярный угол изменяется в диапазоне от нуля до угла клина плюс 2π.

Инверсный куб

Мы отметили выше, что эквивалентом конуса является пирамида, являющаяся по сути "огранённым" конусом. Пирамида имеет несколько полюсов, в частности, три дополнительных полюса имеет тетраэдр. Но и тетраэдр в свою очередь можно рассматривать как фрагмент куба, который можно "собрать" из четырёх пирамид, подобных

тетраэдру. Стороны треугольного основания таких пирамид больше его боковых рёбер, сторон в √2 раза.

С этой точки зрения куб можно определить как "огранённую" сферу. На сфере количество полюсов неограниченно, на кубе их ровно 8. Это относится, как можно заметить, к "конструкции" куба из восьми "трёхгранных конусов" с недостающим, дефицитным углом π/2 каждый. Логично предположить, что возможна и "инверсная" конструкция куба из соответствующих *инверсных* конусов рис.6. Для создания такого "инверсного" куба необходимо разместить на плоскости 4 инверсных конуса и добавить к ним сверху зеркальное отражение:

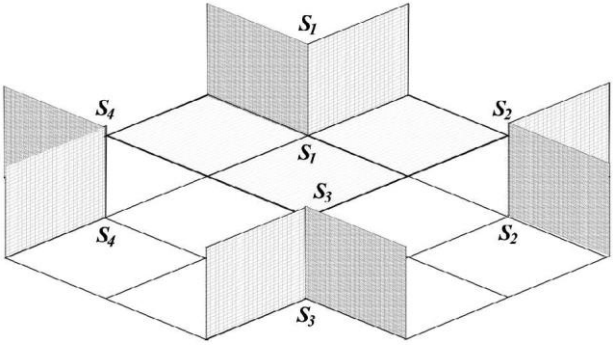


Рис.10. Инверсный куб – куб "вывернутый наизнанку". Верхняя плоскость полюсов S_5 – S_8 не показана

На рис.10 темной штриховкой выделены добавленные фрагменты поверхности, те самые дополнительные углы π/2 каждый. Светлой штриховкой показаны фрагменты, вырезанные на исходной плоскости и повёрнутые ортогонально к ней. Полюса четырех исходных конусов, объединенных в общую поверхность, обозначены S_1 – S_4. Новые полюса инверсного куба обозначены S_5 – S_8.

Все открытые границы элементов на рисунке уходят в бесконечность. Ровными, прямолинейными они изображены для простоты. Полученную конструкцию можно назвать также кубом, вывернутым наизнанку. Как и обычный куб в евклидовом пространстве он имеет 8 вершин – полюсов $S_1 - S_8$, каждая из которых образована тремя рёбрами и тремя гранями. Как и на поверхности обычного куба, параллельный перенос вектора по замкнутому контуру вокруг *четырёх* вершин, полюсов инверсного куба не приводит к его повороту. Любая локальная бесконечная область поверхности инверсного куба, не содержащая полюс, является плоской в евклидовом смысле.

Заключение

Коническая поверхность имеет два принципиально различных вида: либо с вырезанным, дефицитным углом на сворачиваемой поверхности, либо с дополнительным углом, добавленным клином.

Конус можно считать "образующим элементом" ряда геометрических тел: цилиндра, куба, тетраэдра, многогранные пирамиды. Классический конус с дефицитным углом имеет один полюс, вершину. Цилиндр, как вариация конуса, полюсов не имеет. Тетраэдр имеет 4 полюса, а куб – 8 полюсов. Большее число полюсов имеют многогранные пирамиды и тела.

Конус с дополнительным углом, названный инверсным конусом, также позволяет формировать соответствующие инверсные геометрические тела, например, инверсный куб, куб "вывернутый наизнанку".

На всех конических поверхностях постулаты Евклида выполняются только локально, если область не содержит внутри себя полюсов. Поверхности допускают только локальные декартовы системы координат.

Традиционная модель параллельного переноса вектора является противоречивой. В искривлённом пространстве параллельный перенос невозможен в принципе. Эквиугловой перенос, то есть, перенос с сохранением угла относительно линии переноса, при этом может происходить как с поворотом, так и без поворота вектора.

Дифференциал площади круга dS

Для вычисления кривой вращения некоторой звёзды на краю галактики нам необходимо вычислить силу притяжения этой звёзды галактикой. Поскольку звезда испытывает гравитационное притяжения от звёзд, разбросанных по всему объёму площади галактики, уравнение явно имеет интегральную форму. Вместе с тем, вычисление интеграла на компьютере сводится к вычислению *конечного* числа элементов. Интеграл мы заменяем суммой, поскольку никакой даже самым мощный супер компьютер по определению не способен работать с дифференциалами, то есть бесконечно малыми величинам. Вычисление компьютером псевдо-интегральной суммы может быть выполнено только с конечной, то есть, ограниченной точностью. В этой связи нам следует преобразовать точный аналитический интеграл в приблизительную сумму.

Возникает вопрос, как представить дифференциал площади круга dS в виде конечного элемента ΔS, поскольку возможны два подхода: грубый и максимально точный. Первый вариант, грубый даёт заведомо более высокую погрешность, но существенно упрощает уравнение. Целесообразно определить величину погрешности. Очевидно, она будет зависеть от величины элемента ΔS. Чем на большее количество этих малых участков площади мы разобьём диск, круг галактики, тем, очевидно погрешность будет меньше.

Исследование проведём сначала на аналитических дифференциалах dS и интегральных вычислениях.

Аналитическое интегрирование простое

Рассмотрим на диске, круге некоторый элементарный участок площадью dS. Этот элемент dS удалён от центра круга на расстояние *x*.

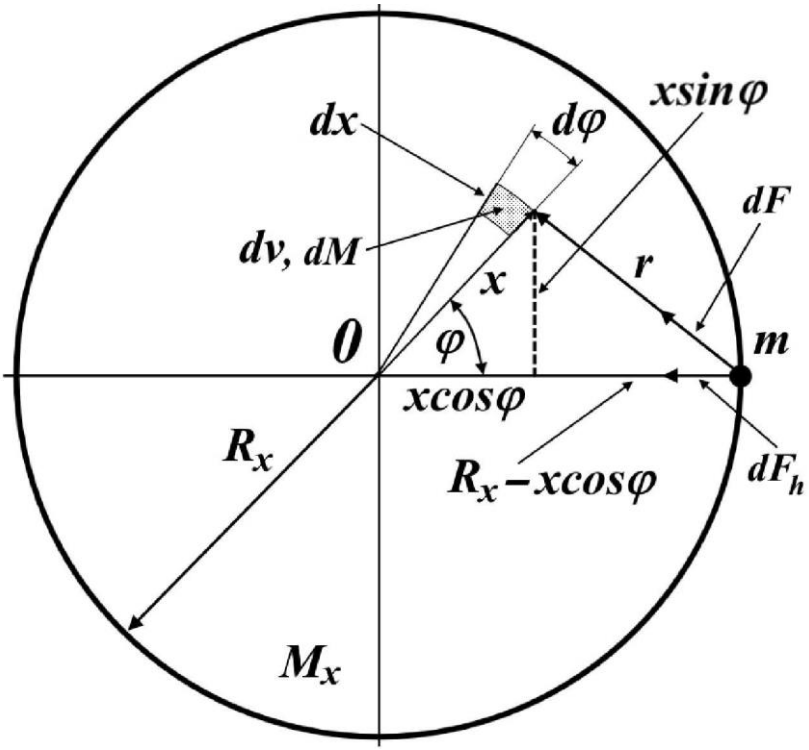


Рис.1. Интегральное вычисление площади круга

Образован он угловым сегментом dφ текущего угла φ и имеет в радиальном направлении дифференциальную толщину d*x*. Следовательно, площадь элементарного участка равна

$$dS = dx \times x d\varphi$$

Радиус круга, диска галактики равен R. Используя сформированный дифференциал площади dS, найдём интегрирование площадь диска всей галактики

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} x dx d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{R} x dx\right] d\varphi$$

Для наглядности, выделяем квадратными скобками внутренний интеграл. Интегралы простые, последовательно вычисляем их

$$S=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R xdx\right]d\varphi=\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2}{2}\right]d\varphi=\frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{R^2}{2}\times 2\pi=\pi R^2$$

Видим, что эта простая форма дифференциала даёт правильный результат и, очевидно, никакие его усложнения не нужны. Тем не менее, проверим и более сложный вариант дифференциала.

Уравнение со сложным дифференциалом

Рассмотрим более точное представление дифференциала площади круга, диска. Будем считать, что это элемент образован двумя кругами, на промежутке между которыми вырезан угловой сегмент. Внешний круг имеет радиус x_1, а внутренний – радиус x_2. Разница площадей, таким образом, образует площадь этого элементарного обруча, для краткости назовём его так. Полная площадь этого обруча равна

$$dS=\pi x_1^2-\pi x_2^2=\pi\left(x_1^2-x_2^2\right) \qquad (1)$$

Разбиваем ее на n, которое в дальнейшем устремим к бесконечности, угловых сектора

$$dS_n=\frac{\pi\left(x_1^2-x_2^2\right)}{n}=\left(x_1^2-x_2^2\right)\times\frac{\pi}{n} \qquad (2)$$

Мы здесь сразу же записали эту площадь как дифференциал, хотя в уравнении пока этого не видно. Дело в том, что мы подразумеваем настолько близкие значения радиусов, что они и образуют такую дифференциальную площадь. Каждый сектор, сегмент имеет угловой размер dφ, причём

$$d\varphi=\frac{2\pi}{n}$$

Мы планируем устремить n к бесконечности, поэтому сразу же записываем элемент угла как дифференциальный. Отсюда находим

$$n = \frac{2\pi}{d\varphi}$$

Подставляем в (2)

$$dS_n = \left(x_1^2 - x_2^2\right) \times \frac{\pi}{n} = \left(x_1^2 - x_2^2\right) \times \frac{\pi}{\left(\frac{2\pi}{d\varphi}\right)} = \left(x_1^2 - x_2^2\right) \times \frac{\pi}{1} \times \frac{d\varphi}{2\pi}$$

Запишем полученное уравнение кратко

$$dS_n = \frac{\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{2} \times d\varphi \qquad (3)$$

Делаем проверку – интегрируем

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right) \times d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right) \times 2\pi =$$

$$= \pi\left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

Получили исходное уравнение (1), следовательно, вычисления верные. Преобразуем уравнение (3)

$$dS = \frac{1}{2}\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1 + x_2\right) \times d\varphi$$

Толщину обруча, разницу радиусов кругов теперь мы записываем, как и планировали, в виде дифференциала

$$dS = \frac{1}{2} dx\left(x_1 + x_2\right) \times d\varphi$$

Можно сказать, что x_2 изменяется от 0 до R – dx, а x_1 – от dx до R. Однако при реальном значении дифференциала dx→0, поэтому каждый из радиусов изменяется от 0 до R. Фактически, в области бесконечно малых величин радиус внешнего круга равен радиусу внутреннего, плюс

бесконечно малый дифференциал. Иначе говоря, радиусы равны, а "большая" бесконечно малая величина и "малая" бесконечно малая величина – это одно и то же. Но в уравнении мы учитываем эту бесконечно малую разницу радиусов. Заменяем малый радиус на большой с учётом этой разницы на дифференциал d*x*

$$dS = \frac{1}{2} dx\left(x_1 + x_1 - dx\right) \times d\varphi$$

$$dS_i = \frac{1}{2}\left(2x_i - dx\right) d\varphi dx \quad (4)$$

Для проверки корректности уравнения, интегрируем, ожидая получить в результате площадь всего круга πR^2. Интегрированием по углу, находим элементарную площадь обруча целиком

$$dS_{ix} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2x_i - dx\right) d\varphi dx$$

Поскольку для переменной, угла φ подынтегральная функция является константой, выносим её за пределы этого интеграла

$$dS_{ix} = \frac{1}{2}\left(2x_i - dx\right) dx \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x_i - dx\right) dx \times 2\pi = \pi\left(2x_i - dx\right) dx \quad (5)$$

Далее интегрируем по *x*, помня, что, как мы отметили выше, диапазон изменения этой переменной от 0 до R

$$S = \int_0^R dS dx = \int_0^R \pi\left(2x_i - dx\right) dx = \pi \int_0^R \left(2x_i - dx\right) dx$$

Замечаем, что интеграл имеет довольно непривычный вид, поскольку в нём присутствуют два тождественных дифференциала d*x*. Разбиваем интеграл на два

$$S = \pi\int_0^R (2x_i)dx - \pi\int_0^R (dx)dx$$

$$S = 2\pi\int_0^R x_i\,dx - \pi\int_0^R (dx)dx \qquad (6)$$

Правый, необычный интеграл следует вычислять с большой осторожностью. Исследуем его

$$I = \int_0^R (dx)dx$$

Интегрируемой величиной является dx без скобок, а подынтегральной функцией – (dx), величина в скобках. Мы интегрируем функцию (dx), о которой мы можем с уверенностью заявить: в процессе интегрирования величина этой функции всегда неизменна, но равна дифференциальному нулю (dx)=0. Изменяется только дифференциал dx. Следовательно, этот интеграл равен нулю *по определению*. Запишем это явно

$$I = \int_0^R (dx)dx = (dx)x\Big|_0^R = (dx)(R-0) = Rdx \to 0$$

С учетом этого интегрируем оставшийся интеграл (6)

$$S = 2\pi\int_0^R x_i\,dx$$

$$S = 2\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^R$$

$$S = \pi(R^2 - 0^2)$$

Запишем кратко

$$S = \pi R^2$$

Это полная площадь круга, что и требовалось найти. Таким образом, при вычислении силы притяжения мас-

сивного дискообразного тела мы вполне можем использовать площадь элементарного элемента диска (4)

$$dS = \frac{1}{2}(2x - dx)d\varphi dx \quad (7)$$

Вместе с тем, видим, что это заметно более сложная запись дифференциала, которая, несомненно, приведёт и к более сложной записи интеграла для вычисления сил притяжения. Поэтому разумнее отказаться от этой записи и использовать более простую.

Численное интегрирование с точным элементом

На самом деле, интегрирования как такового нет, есть суммирование элементарных участков диска, имеющих малую площадь. Рассмотрим такой элементарный участок площадью ΔS в варианте для компьютерных вычислений. Пусть эти участки образуют на диске элементарный обруч. Собственно обруч образован промежутком между двумя окружностями радиуса x_1 и x_2. Следовательно, полная *точная* площадь этого элементарного обруча равна

$$\Delta S_i = \pi\left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

Разбиваем этот обруч на n угловых участков. Площадь этого малого углового элемента обруча будет равна

$$\Delta S_n = \frac{\pi\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{n} = \left(x_1^2 - x_2^2\right) \times \frac{\pi}{n}$$

Преобразуем

$$\Delta S_n = \left(x_1^2 - x_2^2\right) \times \frac{\pi}{n} = \left(x_1 - x_2\right) \times \left(x_1 + x_2\right) \times \frac{\pi}{n}$$

В левых скобках видим толщину обруча, которую обозначим ка элементарный интервал по радиусу Δx, эквивалент дифференциала, запишем это

$$\Delta S_n = \left(x_1^2 - x_2^2\right) \times \frac{\pi}{n} = \Delta x \times \left(x_1 + x_2\right) \times \frac{\pi}{n}$$

Используем для вычислений в качестве текущей переменной диаметр большего круга, x_1

$$\Delta S_n = \Delta x \times \left(x_1 + x_1 - \Delta x\right) \times \frac{\pi}{n}$$

$$\Delta S_n = \Delta x \times \left(2x_1 - \Delta x\right) \times \frac{\pi}{n}$$

Поскольку обруч разбит на n угловых участков, величина этого элементарного угла равна

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$$

Отсюда

$$n = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}$$

Следовательно

$$\Delta S_n = \Delta x \times \left(2x_1 - \Delta x\right) \times \frac{\pi}{\left(\frac{2\pi}{\Delta\varphi}\right)} = \Delta x \times \left(2x_1 - \Delta x\right) \times \pi \times \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

В краткой записи

$$\Delta S_n = \frac{1}{2}\left(2x_1 - \Delta x\right)\Delta\varphi\Delta x \qquad (8)$$

Подсчитаем сумму всех элементарных участков всех обручей, рассчитывая получить полную площадь диска. На первом этапе получим площадь целого частного обруча. При фиксированном значении его радиуса эта величина будет получена простым умножением на число угловых сегментов обруча

$$\Delta S_n = \frac{1}{2}\left(2x_1 - \Delta x\right)\Delta\varphi\Delta x \times n = \frac{1}{2}\left(2x_1 - \Delta x\right)\Delta\varphi\Delta x \times \frac{2\pi}{\Delta\varphi}$$

$$\Delta S_n = \pi\left(2x_n - \Delta x\right)\Delta x$$

Теперь, чтобы найти полную площадь диска, необходимо просуммировать площади всех элементарных обручей

$$S = \sum_{x=0}^{R} \pi(2x - \Delta x)\Delta x$$

Разделим сумму на две суммы

$$S = \sum_{x=0}^{R} \pi(2x - \Delta x)\Delta x = \pi \sum_{x=0}^{R} (2x)\Delta x - \pi \sum_{x=0}^{R} (\Delta x)\Delta x$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$S_1 = 2\pi\Delta x \sum_{x=0}^{R} x$$

Величина Δx имеет конечное значение, определяемое разбиением R на отрезки

$$\Delta x = \frac{R}{k}$$

Соответственно, каждое значение *x* также определяется через этот коэффициент разбиения

$$x_m = \frac{R}{k} \times m$$

Внесем эти определения в уравнение для S_1

$$S_1 = 2\pi \frac{R}{k} \sum_{m=0}^{k} \frac{R}{k} \times m$$

$$S_1 = 2\pi \frac{R^2}{k^2} \sum_{m=0}^{k} m$$

Знак суммы здесь теперь означает "сумма всех порядковых числительных от 0 до k". Эта сумма определяется известным уравнением

$$\sum_{m=0}^{k} m = \frac{k(k+1)}{2}$$

Поэтому получаем значение первой суммы S_1

$$S_1 = 2\pi \frac{R^2}{k^2} \sum_{m=0}^{k} m = 2\pi \frac{R^2}{k^2} \frac{k(k+1)}{2}$$

Раскрываем скобки

$$S_1 = 2\pi \frac{R^2}{k^2} \frac{k^2 + k}{2} = 2\pi \frac{R^2}{k^2} \frac{k^2}{2} + 2\pi \frac{R^2}{k^2} \frac{k}{2} = \pi R^2 + \pi \frac{R^2}{k}$$

Замечаем, что получена площадь всего диска плюс какая-то добавка. Но у нас есть второе слагаемое, отрицательная сумма S_2. Возможно, она уничтожит эту добавку. Рассмотрим это второе слагаемое

$$S_2 = \pi \sum_{x=0}^{R} (\Delta x) \Delta x$$

Как и выше заменяем переменные на их известные значения

$$S_2 = \pi \sum_{m=0}^{k} \frac{R}{k} \times \frac{R}{k}$$

Обращаем внимание, что под знаком суммы находятся константы, не зависящие от переменной суммирования. Выносим их за знак суммы

$$S_2 = \pi \sum_{m=0}^{k} \frac{R}{k} \times \frac{R}{k} = \pi \frac{R^2}{k^2} \sum_{m=0}^{k} 1$$

После выноса констант под знаком суммы осталась очевидная единица. Смысл этой суммы достаточно прост: просуммировать k-раз эту величину, поэтому

$$\sum_{m=0}^{k} 1 = k$$

Следовательно

$$S_2 = \pi \frac{R^2}{k^2} \times k = \pi \frac{R^2}{k}$$

Помним, что эта сумма – отрицательная, поэтому

$$S = S_1 - S_2 = \pi R^2 + \pi \frac{R^2}{k} - \pi \frac{R^2}{k} = \pi R^2$$

Это полная площадь круга, что и требовалось найти. Следовательно, при компьютерном, дискретном вычислении силы притяжения массивного дискообразного тела мы вполне можем использовать *точную* дискретную площадь

элементарного элемента диска (8). Обращаем внимание, что это уравнение в точности повторяем дифференциальное уравнение (7), что, в общем-то, не удивительно.

Численное интегрирование простое

Итак, мы пришли к выводу, что и сложная и простая форма записи дифференциала dS дают, в конечном счете, один и тот же результат, то целесообразно такую же проверку сделать и для конечной величины дифференциала – конечного элемента ΔS, которую предполагаем использовать в компьютерных вычислениях.

Рассмотрим площадь элементарного участка ΔS в качестве варианта дифференциала dS. Полная площадь элементарного обруча диска

$$\Delta S = \Delta x \times x \times \Delta\varphi$$

Площадь этого элементарного обруча радиусом x и толщиной Δx в данном случае равна сумме n этих элементов, где n – число элементов, на которое разбит этот обруч

$$\Delta S_x = \Delta x \times x \times \Delta\varphi \times n$$

Очевидно, что

$$n = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}$$

Следовательно

$$\Delta S_x = \Delta x \times x \times \Delta\varphi \times n = \Delta x \times x \times \Delta\varphi \times \frac{2\pi}{\Delta\varphi} = 2\pi \times \Delta x \times x$$

Получается буквально, что точность вычислений не зависит от числа элементов разбиения обручей! Это довольно странно. Рассмотрим, чему равна сумма площадей всех обручей, будет ли она равна известной площади круга

$$S = \sum_{x=1}^{k} \Delta S_x = \sum_{1}^{k} 2\pi \times \Delta x \times x$$

Здесь уже k – это количество обручей, величина, на которую разбит радиус круга. Очевидно

$$k = \frac{R}{\Delta x} \leftrightarrow \Delta x = \frac{R}{k}$$

Соответственно

$$x_i = i \times \Delta x = i \times \frac{R}{k}$$

Переписываем уравнение суммы

$$S = 2\pi \sum_{1}^{k} x \times \Delta x = 2\pi \sum_{i=1}^{k} x \times \Delta x$$

Поскольку величины k и R определены заранее, то также оказывается определёным заранее и значение Δx. Подставляем эти известные величины в уравнение суммы

$$S = 2\pi \sum_{i=1}^{k} x \times \Delta x = 2\pi \sum_{i=1}^{k} x_i \times \frac{R}{k}$$

Величина дроби является константой, поскольку состоит из констант, заданных заранее и этот сомножитель содержится в каждом слагаемом суммы. Следовательно, его можно вынести за знак суммы

$$S = 2\pi \sum_{i=1}^{k} x_i \times \frac{R}{k} = 2\pi \frac{R}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$$

Известна также и величина радиуса каждого обруча x_i

$$S = 2\pi \frac{R}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i = 2\pi \frac{R}{k} \sum_{i=1}^{k} i \times \frac{R}{k}$$

Вновь видим константу, общий множитель каждого слагаемого суммы. Выносим и его за знак суммы

$$S = 2\pi \frac{R}{k} \sum_{i=1}^{k} i \times \frac{R}{k} = 2\pi \frac{R^2}{k^2} \sum_{i=1}^{k} i$$

Под знаком суммы остался порядковый номер слагаемых. То есть, сумма является суммой k порядковых чисел. Уравнение для вычисления этой суммы известно

$$S = 2\pi \frac{R^2}{k^2} \sum_{i=1}^{k} i = 2\pi \frac{R^2}{k^2} \times \frac{k(k+1)}{2}$$

Раскрываем скобки

$$S = 2\pi \frac{R^2}{k^2} \times \frac{k(k+1)}{2} = 2\pi \frac{R^2}{k^2} \times \frac{k^2}{2} + 2\pi \frac{R^2}{k^2} \times k = \pi R^2 + \frac{2\pi R^2}{k}$$

Получается, что площадь зависит от дискретности разбиения

$$S = \pi R^2 + \frac{2\pi R^2}{k} = \pi R^2 \left(1 + \frac{2}{k}\right)$$

Площадь, вычисленная с использование конечного размера "дифференциала" текущего радиуса Δx, тем сильнее превышает реальную площадь круга, чем меньше число интервалов k. В частности, используемое в наших вычислениях значение k = 1 000, даёт ошибку площади

$$\frac{S_\Delta}{S} = \pi R^2 \left(1 + \frac{2}{k}\right) : \pi R^2 = 1 + \frac{2}{k} = 1 + \frac{2}{1000} = 1{,}002$$

то есть, менее 0,2%. Следует признать такое отклонение хорошим. И вновь вывод: усложения при формировании конечного значения ΔS по новому способу излишни. При формировании интеграла для компьютерного вычисления силы притяжения звёзд дисковой галактикой целесообразно использовать это короткое уравнение

$$\Delta S = \Delta x \times x \times \Delta\varphi$$

08.02.2021

Диск Пуанкаре

Перенос вектора на поверхности отрицательной кривизны

Можно заметить, что параллельный перенос векторов на искривлённых поверхностях в литературе демонстрируется исключительно на поверхностях сферических, на сферах, поверхностях положительной кривизны. О параллельном переносе векторов в пространстве отрицательной кривизны, на плоскостях Лобачевского не удалось найти даже упоминаний. Вместе с тем, несомненно, описанные правила переноса и на таких поверхностях приведут к такому же эффекту: вектор вернётся в исходную точку с поворотом. Как и в пространствах положительной кривизны, на сфере, прямые линии на поверхностях отрицательной кривизны также заменяются на кратчайшие линии, на геодезические:

"... нужно только заменить понятия прямых (кратчайших линий в мире Евклида) на геодезические линии (экстремальные кривые) на гиперповерхности" [25, с.13].

"... в геометрии Лобачевского "прямая" понимается как кратчайшая линия – линия, расстояние вдоль которой между двумя точками, ей принадлежащими, является наименьшим. Понятие параллельности двух прямых подразумевает лишь их непересечение и не вбирает в себя свойство эквидистантности (равноотстояния) двух параллельных прямых" [53, с.228].

Как и геометрия пространств положительной кривизны, геометрия Лобачевского возникла в результате отказа от 5-го постулата Евклида, постулата о параллельности, его подмены.

"В геометрии Лобачевского в плоскости через точку Свне данной прямой АВпроходит бесконечное множество прямых, не пересекающих АВ [46].

При этом выделяются две особые "параллельные", названные равнобежными, асимптотически параллельными или просто параллельными. Буквально: это параллельные прямые в одну или другую стороны указанной прямой AB от точки C. Отметим, что название "параллельные" в любой комбинации в данном случае является условным. Как и на сфере, в пространстве отрицательной кривизны это понятие некорректно, а все "прямые" являются "наикратчайшими" кривыми линиями, геодезическими. Как и в любом искривлённом пространстве геодезические в пространстве отрицательной кривизны не являются эквидистантными.

Однако, в некоторых источниках из описанных линий, геодезических параллельным считаются только две *граничные* прямые – равнобежные, остальные, которых бесконечное число, названы сверхпараллельными, ультрапараллельными или расходящимися:

"Прямые, проходящие через точку ... , не пересекающие и не параллельные прямой ... , называются сверхпараллельными по отношению к прямой ..." [48].

Геометрию Лобачевского можно реализовать на обычной евклидовой плоскости, например, на так называемом диске Пуанкаре. Граница круга, диска Пуанкаре, окружность называется абсолютом и самому диску не принадлежит:

"Параллельными в смысле Лобачевского называются прямые, имеющие общую точку на абсолюте" [1].

В отличие от сферических пространств, пространства Лобачевского могут быть представлены в виде *разнообразных* геометрических тел: псевдосфера Бельтрами [40], катеноид, поверхность Куена [38] и другие [53]. Основой всех этих тел, их поверхностей является некие абстрактные поверхности *постоянной* отрицательной кривизны:

"Геометрия плоскости Лобачевского реализуется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны в следующем смысле. Односвязный кусок такой поверхности всегда можно взаимно однозначно отобразить на кусок плоскости Лобачевского с сохранением длин всех кривых, углов между ними, площадей всех фигур и т.д. Геодезические линии поверхности отображаются при этом в прямые плоскости Лобачевского" [54, с.407].

Звучит несколько странно, поскольку поверхность, пространство Лобачевского по определению и является такой поверхностью. Правда, реальной, *физической* поверхности Лобачевского *постоянной* отрицательной кривизны не существует. Не существует *полной* и регулярной поверхности, внутренняя геометрия которой представляла бы геометрию *полного пространства* Лобачевского, поверхности *постоянной* отрицательной кривизны:

"... не удаётся с помощью ни одной из известных до сих пор поверхностей постоянной отрицательной кривизны осуществить целиком всю плоскость Лобачевского" [26, с.304]

"... не существует аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей нигде особенностей и повсюду регулярной" ... "на ... вопрос о том, можно ли ... осуществить в евклидовом пространстве на некоторой регулярной аналитической поверхности всю плоскость Лобачевского, надо ответить отрицательно" [26, с.311].

Обратим внимание, что *двухмерная* поверхность Лобачевского подразумевается находящейся в евклидовом пространстве, в *трёхмерном* пространстве погружения E^3. Специфические свойства пространства Лобачевского создают трудности для формирования *декартовой* координатной сетки, которая, по сути, может быть образована

только эквидистантными прямыми. Как следствие, не вполне ясно, как задать на такой поверхности координаты точек. Также странным свойством поверхности Лобачевского является и то, что прямые, параллельные данной, не параллельны между собой.

С другой стороны, определённую трудность представляет и построение геодезических даже в демонстрационных целях. Видимо, по этой причине примеры параллельного переноса векторов на поверхности отрицательной кривизны в литературе, в доступных источниках нам не встретились. Кривизна пространств Лобачевского определяется либо по сумме углов треугольника, меньшей 180 градусов, либо по "параллельному" движению муравьёв на такой поверхности, в процессе которого расстояние между ними возрастает.

Создадим иллюстрацию "параллельного" переноса вектора на плоскости Лобачевского, используя модель диска Пуанкаре и рассуждения Пенроуза о гравюрах Эшера. В этом процессе мы будем опираться на известные три положения, приняв их в качестве постулатов. Первое: в модели Пуанкаре на диске все прямые Лобачевского являются дугами окружностей; второе: эти дуги, прямые линии, геодезические касаются границы круга (абсолюта) под прямыми углами; третье: через любые две точки на диске можно провести *единственную* прямую линию Лобачевского, наикратчайшую, геодезическую.

При этом мы всегда помним, что никакого параллельного, в традиционном смысле этого слова, переноса на плоскости Лобачевского, в том числе в модели Пуанкаре, быть не может, поэтому, как и на поверхности сферы, мы будем производить эквиугловой перенос векторов.

Перенос вектора на диске Пуанкаре

Сформируем на диске Пуанкаре треугольную траекторию, задав три вершины, две из которых расположим для удобства на диаметре диска.

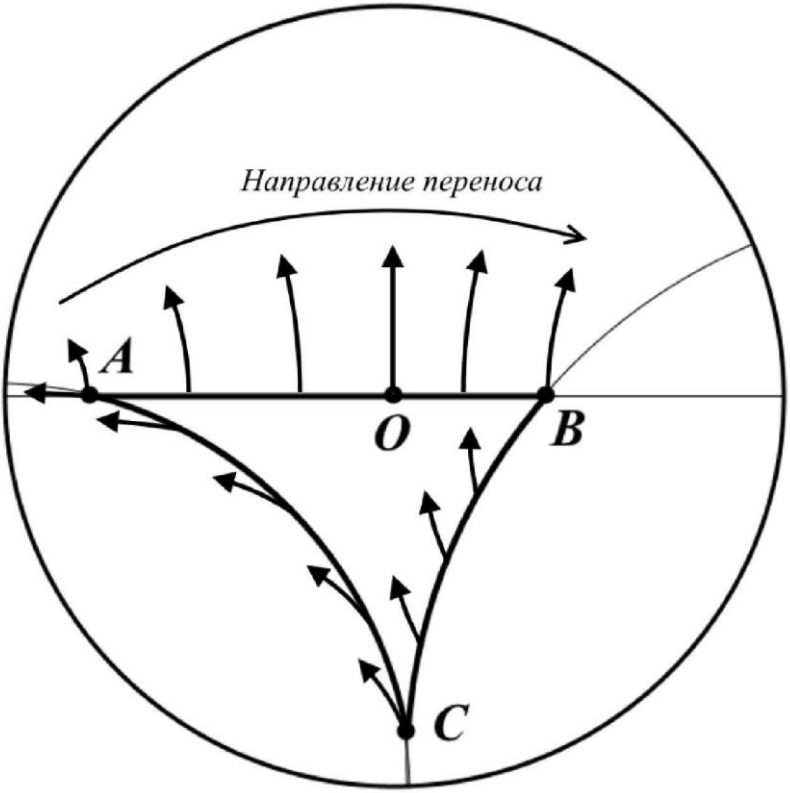


Рис.1. Перенос вектора по поверхности отрицательной кривизны, в пространстве Лобачевского на диске Пуанкаре. Начальный вектор из точки А перенесён по замкнутому контуру, гиперболическому треугольнику АВС в исходную точку. После переноса вектор изменил своё направление. На боковых сторонах треугольника векторы показаны условно, укороченными.

Начальное положение вектора – точка А. При движении по первой стороне гиперболического треугольника АВ вектор визуально искривляется и меняет своё направление вдоль соответствующей этому месту геодезической. Однако в каждой точке переноса он ортогонален к этой стороне треугольника.

Перейдя на сторону ВС треугольника, вектор продолжает перемещение, по-прежнему сохраняя угол по отношению к этой стороне – эквиугловое перемещение. Чтобы не затенять рисунок во всех последующих положениях вектора мы изобразили его слегка укороченным.

В точке С вектор переходит теперь уже на сторону СА, сохраняя угол с нею при движении по этой стороне.

В результате, вернувшись в исходную точку А, вектор оказался повёрнутым по отношению к своему исходному направлению. Отметим, что при движении по сферической поверхности, пространству положительной кривизны вектор в конечной точке совершает небольшой поворот в направлении обхода контура. Напротив, при движении по замкнутому контуру на поверхности Лобачевского, в пространстве отрицательной кривизны вектор совершает небольшой поворот *против* направления обхода, вращения.

Построение геодезической на диске Пуанкаре

При рассмотрении переноса вектора на диске Пуанкаре, для построения геодезических мы использовали процедуру [13], найденную в интернете.

Процедура представлена как последовательность геометрических построений с линейкой и циркулем. Доказательства корректности действий там не приведены. Хотя визуально решение явно верное, мы всё-таки попытались найти в литературе его строгое доказательство. Однако достаточно тщательные поиски в интернете ре-

зультата не принесли. В просмотренных десятках учебников и статей по геометрии также не удалось найти такого доказательства. Встречались лишь достаточно редкие упоминания ортогонально пересекающихся окружностей. Возможно, приведённое далее наше доказательство в открытой печати является уникальным, первым и единственным.

Кратко содержание задачи можно сформулировать следующим образом. Задан диск Пуанкаре (окружность, А с центром в точке А и радиусом R), являющийся, по сути, эквивалентом, симуляцией пространства отрицательной кривизны Лобачевского, и две точки В и Р внутри диска.

Нужно провести через эти две точки геодезическую – окружность, ортогональную к окружности А. Напомним, что ортогональным пересечением окружностей является такое, при котором в точке их пересечения касательные к ним и их радиусы перпендикулярны друг другу. Простейшим случаем построения является проведение ортогональной окружности, геодезической через единственную точку В внутри диска. Поэтому проведение геодезической через две точки можно произвести простым подбором: нужно строить разные геодезические через первую точку так долго, пока одна из них всё-таки не пройдёт через вторую заданную точки.

Способ построения геодезической через одну точку прост. Необходимо через произвольную точку на окружности, абсолюте диска Пуанкаре провести радиус и перпендикуляр к нему, касательную к окружности. Пересечение касательной и перпендикуляра, восстановленного к середине центра хорды, проходящей через эту и заданную первую точку, будет центром искомой окружности.

На следующем рисунке построены несколько таких окружностей – геодезических, одна из которых вследствие

подбора наконец-то прошла и через вторую заданную нами точку P. В процессе построения геодезических замечаем интересные свойства диска Пуанкаре. Во-первых, все без исключения построенные геодезические, окружности, проходящие через заданную точку B, проходят также и ещё через одну точку, точку C; обе точки называют инверсными. Это обстоятельство без доказательств отмечает, в частности, Кокетер:

"Через пару инверсных точек можно провести целый пучок окружностей (бесконечно много), и все они ортогональны к окружности инверсии" [37, с.126].

Во-вторых, как прямое следствие этого, буквально, по определению, по построению, центры всех этих окружностей, геодезических находятся на одной линии, перпендикуляре к центру линии, соединяющей эти две точки B и C.

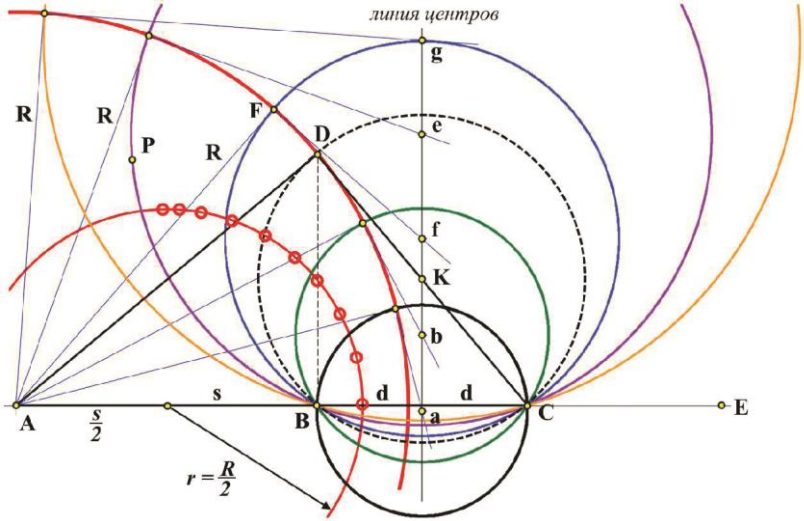


Рис.2. Построение центров ортогональных окружностей

На линии AE, рисунка рис.2, выбираем центр окружности A и произвольную точку B. Выбираем на окружности произвольную точку F, проводим через неё

радиус R и перпендикулярно к нему – касательную. Соединяем выбранную произвольную точку F с точкой B и проводим к центру линии перпендикуляр до пересечения с касательной. Полученную точку f используем как центр для построения окружности, проходящей через точку касания. Повторяем процедуру ещё для нескольких произвольных точек. В результате получаем центры окружностей a, b, f, e, g, K. Замечаем, что все окружности, проходящие через соответствующие им точки касательных и, следовательно, ортогональные к базовой окружности с центром в A и радиусом R, проходят также через точки B и C. Центры всех этих окружностей расположены на одной вертикальной линии ag – линии центров. Центры хорд этих ортогональных окружностей расположились на одной окружности, радиус которой равен половине радиуса диска Пуанкаре, а центр расположен на середине отрезка, соединяющего заданную первую точку B и центр A диска Пуанкаре.

Действительно, рассмотрим *произвольную* точку M на окружности A, на абсолюте диска Пуанкаре. Проведём хорду MB и обозначим её середину буквой N. Как мы показали, перпендикуляр к этой точке пересекает линию центров, создавая центр ортогональной окружности. Соединим точку M с точкой O – серединой отрезка s = AB. Рассмотрев треугольник AMB, замечаем, что линия NO = r параллельна линии AM = R. Из этого сразу же следует, что ON = r = R/2:

$$r = \frac{R}{2}$$

Наконец, последней, четвертой обнаруженной особенностью проведённых построений явилось то, что полученные точки B и C отвечают известному в геометрии соотношению подобных треугольников: квадрат радиуса диска равен произведению отрезков AB и AC.

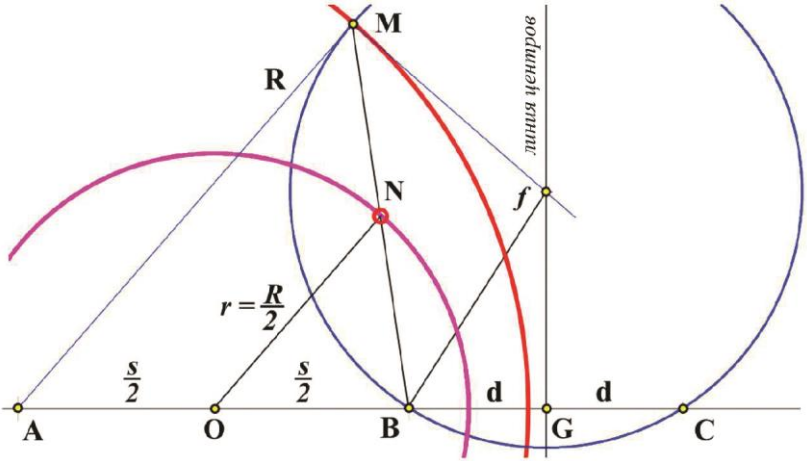


Рис.3. Окружности, проходящие через точки касательных

Все окружности, проходящие через соответствующие им точки касательных, например, M и, следовательно, ортогональные к базовой окружности с центром в A и радиусом R, проходят также через точки B и C. Центры всех этих окружностей, в частности, окружности AM, расположены на одной вертикальной линии Gf в центре BC – линии центров. Центры хорд этих ортогональных окружностей, например, MB располагаются на одной окружности, радиус которой равен половине радиуса R диска Пуанкаре, а центр расположен на середине отрезка, соединяющего центр A диска Пуанкаре и заданную первую точку B, определяемую уравнением $AB \times AC = R^2$.

Сначала отметим, что среди всех окружностей, проходящих через точки B и C, согласно нашим построениям можно выделить, по меньшей мере, четыре специфические окружности:

1. Окружность, ортогональная к базовой, к абсолюту диска A в точке F. Центр этой *самой большой* окружности находится в бесконечности: $r = \infty$. Сама окружность в об-

ласти этих точек вырождается в прямую линию и проходит через центр A базовой окружности – диска Пуанкаре.

2. Очевидно, что существует также и ортогональная окружность *минимального* радиуса: r = d, проходящая через заданную точку B.

3. Также существует и ещё одна, довольно загадочная ортогональная окружность: окружность, имеющая радиус диска R. Центр этой окружности не лежит на оси центров и сама окружность не проходит через точки B и C. Она ортогональна к границе окружности, абсолюту диска Пуанкаре в его верхней части; её можно называть "смещённым двойником" другой окружности с радиусом s+d, также ортогональной в этой точке.

4. Ортогональную окружность, проходящую через точку D, благодаря её специфическим свойствам, можно назвать *главной*. Рассмотрим треугольник ADC. Построен он следующим образом. Из заданной нами исходной точки B восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с кругом Пуанкаре. В точке пересечения строим касательную к кругу до пересечения линии AB. Точку пересечения обозначаем как C – является той самой инверсной точкой вне диска, которая использовалась в предыдущих рассуждениях. Полученный треугольник ABC формирует известное интересное соотношение для инверсных точек. Покажем это, для чего рассмотрим два подобных треугольника ADC и ADB. Треугольники подобны, поскольку оба прямоугольные и имеют одинаковые углы – общий угол A. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC} \qquad (1)$$

$$AB \times AC = AD^2 = R^2$$

Перепишем уравнение согласно нашим обозначениям

$$AB = s$$
$$AC = s + 2d \qquad (2)$$
$$R^2 = s(s + 2d)$$

Как видим, известное уравнение для инверсных точек (1) является тривиальным следствием подобия треугольников, причём для вывода этого уравнения никакая окружность и не нужна. Вместе с тем, обнаруженные нами особенности инверсных точек, строго говоря, являются *визуальными*. То, что все окружности, ортогональные к абсолюту диска Пуанкаре проходят также и через инверсные точки, прямо ни из чего не следует. Это просто наблюдательный факт, который, очевидно, имеет определённые погрешности сопутствующих построений. Хотя интуитивно мы предполагаем справедливость этих соотношений, что, действительно, все ортогональные окружности обладают описанными свойствами, нам следует всё-таки привести строгое математическое доказательство справедливости этих соотношений.

Доказательство

Для доказательства определим исходные данные. Задан диск (окружность A; далее окружности для краткости будем именовать буквами их центров) радиуса R. На некоторой линии, проходящей через центр окружности, отложим отрезок s, означающий расстояние некоторой точки B от центра A. Через эту точку мы хотим провести геодезическую, пока произвольную. Геодезическая на диске Пуанкаре – это дуга окружности, ортогональная к заданной окружности A.

Восстановим из точки B перпендикуляр до пересечения с окружностью A в точке D и проведём к ней в этой точке касательную. Точку пересечения касательной с ли-

нией AB обозначим как C. Эта точка является инверсной к точке B согласно уравнению (1).

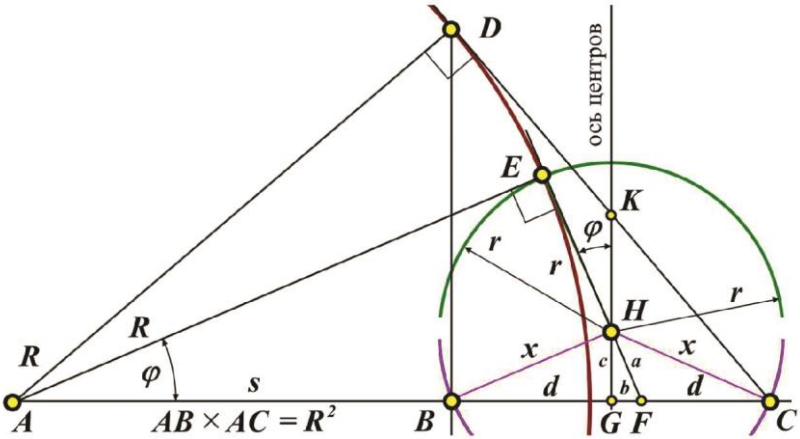


Рис.4. Инверсная точка. Задан диск радиуса R. На некоторой линии, проходящей через центр окружности A, отложен отрезок AB. Из точки B восстановлен перпендикуляр до пересечения с окружностью A в точке D и проведена к ней касательная. Точка пересечения касательной с линией AB обозначена как C. Эта точка является инверсной к точке B и отвечает уравнению $AB \times AC = R^2$.

Восстановим перпендикуляры к середине отрезка BC и середине отрезка BD. Перпендикуляр, проходящий через середину отрезка BC, обозначим буквой F и назовём осью центров ортогональных окружностей. Для краткости обозначим буквой d отрезки BF = FC = d.

Два указанных перпендикуляра пересекутся в точке, обозначенной буквой K. Согласно построению – эта точка является центром окружности, проходящей через точки B, C и D. Окружность по определению ортогональна абсолюту, границе диска, окружности A.

Таким образом, мы произвели построения, соответствующие уравнению (1) и получили одну из окружностей,

подтверждающую сделанные ранее наблюдения. Однако согласно этим наблюдениям, через единственную точку B в окружности A мы можем провести любое число окружностей, ортогональных к A. Проверим, возможно ли это при точных построениях.

Выберем одну из таких окружностей, проходящих через произвольную точку E. Положение этой точки определим следующим образом. Проведём под углом φ радиус, обозначив его конец выбранной точкой E. Проведём в этой точке касательную к окружности A.

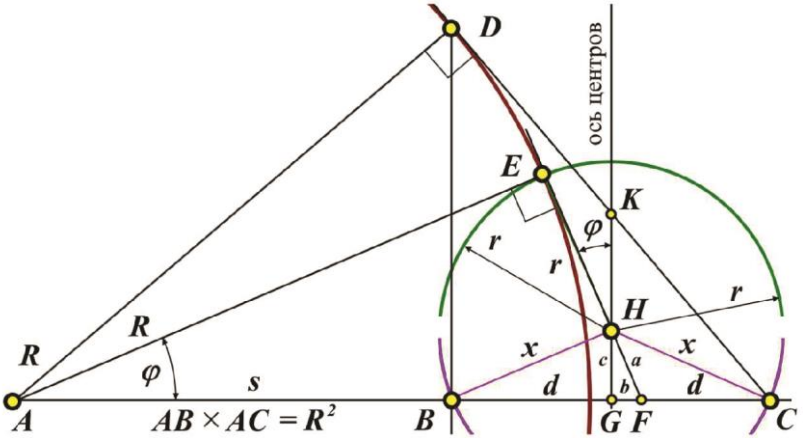


Рис.5. Необходимо доказать, что при условии AB × AC = R^2 ортогональная к окружности AE *произвольная* окружность EH проходит как через точку E пересечения радиусов, так и через инверсные точки B и C. Необходимым и достаточным условием этого является равенство $x = r$.

По определению центр ортогональной окружности будет лежать на этой касательной и одновременно на оси центров. Точку пересечения этих двух линий обозначим H. Радиус этой ортогональной окружности EH обозначим буквой r.

Из точки H проводим окружность радиусом EH = r. В проведённом обзоре мы заметили, что эта окружность, видимо, пройдёт и через две точки B и C, определяемые уравнением (1). Однако эти построения всё-таки приблизительные, при них возможны погрешности, поэтому мы не можем утверждать, что это действительно так. Поскольку это пока не доказано, дополнительный радиус HB, который построению равен также и радиусу HC, обозначим через *x* как неизвестный.

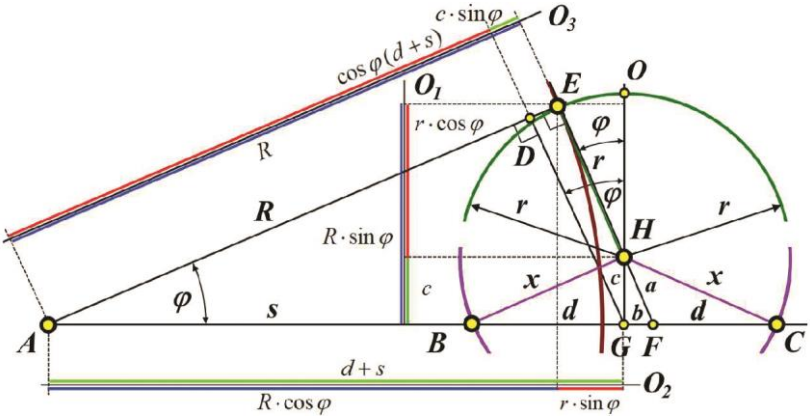


Рис.6. Доказано: ортогональная к диску AE *произвольная* окружность EH при условии AB × AC = R^2 проходит как через точку E пересечения радиусов, так и через инверсные точки B и C.

В самом деле, нам достоверно известны центр окружности H и её радиус EH = r. Но ни из чего не следует, что эта окружность пройдёт точно через точку B. Если бы окружность радиусом r = EH прошла через эту точку, то длина отрезка *x* была бы равна радиусу r. Это безусловно так, поскольку любой отрезок длиной r и находящийся одним концом в центре H окружности, другим концом *обязательно* будет находиться на этой окружности. Следовательно, необходимо доказать, что *x* = r: это равенство

является необходимым и достаточным условием того, что все ортогональные к А окружности, проходящие через точку Е, обязательно проходят также и через инверсные точки В и С.

Для доказательства изменим рисунок рис.6, оставив на нём только необходимые элементы. Также добавим на него три проекционные оси O_1, O_2 и O_3, которые в дальнейшем позволят геометрически наглядно продемонстрировать смысл соотношений, полученных аналитически.

Сразу отметим причину равенства трёх углов φ на рисунке. Углы EHO и DGO равны, поскольку параллельны их стороны. Угол EAB равен этим углам, поскольку их стороны ортогональны. Далее, для определения длин сторон образовавшегося треугольника AEF, используя (2), вычислим некоторые вспомогательные параметры

$$R^2 = s \times (s + 2d) = s^2 + 2sd$$

$$\frac{R^2}{s} - s = 2d \qquad (3)$$

$$d = \frac{R^2 - s^2}{2s}$$

Длину короткой стороны прямоугольного треугольника, катета EF определим так

$$\frac{EF}{R} = tg\varphi \qquad (4)$$

$$EF = R \cdot tg\varphi$$

Гипотенузу AF, соответственно, таким образом

$$\frac{R}{AF} = \cos\varphi$$

$$AF = \frac{R}{\cos\varphi}$$

Также гипотенузу мы можем вычислить и из линейных соотношений в треугольниках

$$AF = s + d + b$$
$$b = a \cdot \sin\varphi \qquad (5)$$
$$a = EF - r$$

Подставляем определённые ранее величины

$$AF = s + d + b = s + d + a \cdot \sin\varphi = s + d + (EF - r) \cdot \sin\varphi$$

Сделаем в этом уравнении с учетом (4) еще одну подстановку

$$AF = s + d + (EF - r) \cdot \sin\varphi = s + d + (R \cdot tg\varphi - r) \cdot \sin\varphi$$

Теперь с учетом (5) и (4) определим искомый радиус x

$$x^2 = d^2 + c^2$$
$$c = a \cdot \cos\varphi \qquad (6)$$
$$a = R \cdot tg\varphi - r$$

Из этих соотношений находим

$$c = (R \cdot tg\varphi - r) \cdot \cos\varphi$$
$$c = R \cdot \sin\varphi - r \cdot \cos\varphi$$

На рисунке величины, входящие в уравнение, наглядно показаны в виде проекций на ось O_1. Ось проведена ортогонально главной оси АС, поэтому углы φ относительно неё определяются однозначно. Исследуем треугольники далее и находим в них сдедующее соотношение

$$d + s = R \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi$$

Рассмотрим ещё одну проекционную ось O_2, которая явно демонстрирует справедливость этого уравнения. Ось параллельна главной оси АС, поэтому, как и выше, углы φ относительно неё определяются однозначно. Далее производим тривиальные алгебраические преобразования над этими уравнениями, системой из двух уравнений

$$\begin{cases} c = R \cdot \sin\varphi - r \cdot \cos\varphi \\ d + s = R \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

Переносим влево слагаемые, содержащие радиус r ортогональной окружности:

$$\begin{cases} r \cdot \cos\varphi = R \cdot \sin\varphi - c \\ r \cdot \sin\varphi = d + s - R \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

Возводим каждое из уравнений в квадрат и суммируем их, удаляя знак системы

$$\begin{cases} r^2 \cdot \cos^2\varphi = (R \cdot \sin\varphi - c)^2 \\ r^2 \cdot \sin^2\varphi = (d + s - R \cdot \cos\varphi)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 \cdot \cos^2\varphi = R^2 \cdot \sin^2\varphi - 2Rc \cdot \sin\varphi + c^2 \\ r^2 \cdot \sin^2\varphi = (d + s)^2 - 2(d + s)R \cdot \cos\varphi + R^2 \cdot \cos^2\varphi \end{cases}$$

$$r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi = R^2 \cdot \sin^2\varphi - 2Rc \cdot \sin\varphi + c^2 + (d + s)^2 -$$
$$- 2(d + s)R \cdot \cos\varphi + R^2 \cdot \cos^2\varphi$$

Сумму слева сворачиваем, учитывая сумму квадратов синуса и косинуса. Переносим величину c^2 влево. Раскрываем первые скобки

$$r^2 - c^2 = R^2 \cdot \sin^2\varphi - 2Rc \cdot \sin\varphi + (d + s)^2 -$$
$$- 2(d + s)R \cdot \cos\varphi + R^2 \cdot \cos^2\varphi = r^2 - c^2$$
$$R^2 \cdot \sin^2\varphi - 2Rc \cdot \sin\varphi + d^2 + 2ds + s^2 -$$
$$- 2(d + s)R \cdot \cos\varphi + R^2 \cdot \cos^2\varphi$$

Появившуюся величину d^2 также переносим влево, на сторону квадратов c^2 и r^2. Собираем подобные члены, свернув слагаемые с квадратом R^2, обнаружив сумму квадратов синуса и косинуса

$$r^2 - c^2 - d^2 =$$
$$= R^2 - 2Rc \cdot \sin\varphi + 2ds + s^2 - 2(d + s)R \cdot \cos\varphi$$

Согласно первой строке уравнений (6) заменяем слева сумму квадратов на квадрат длины неизвестного радиуса $x^2 = r^2$

$$r^2 - x^2 = R^2 - 2Rc \cdot \sin\varphi + 2ds + s^2 - 2(d + s)R \cdot \cos\varphi$$

Раскрываем оставшиеся скобки и преобразуем

$$r^2 - x^2 = R^2 - 2Rc \cdot \sin\varphi + 2ds + s^2 - 2(d+s)R \cdot \cos\varphi =$$
$$= R^2 + 2ds + s^2 - Rc \cdot \sin\varphi + R \cdot \cos\varphi(d+s)$$

Подставляем из первой строки уравнения (3) и раскрываем скобки:

$$R^2 = 2ds + s^2$$
$$r^2 - x^2 = R^2 - Rc \cdot \sin\varphi + R \cdot \cos\varphi(d+s)$$
$$r^2 - x^2 = R^2 - R[c \cdot \sin\varphi + \cos\varphi(d+s)]$$

Опускаем перпендикуляр из точки G на радиус R. Находим значения в уравнении, эквивалентные длинам отрезков в образовавшемся треугольнике. Подставляем в уравнение:

$$c \cdot \sin\varphi = DE$$
$$\cos\varphi(d+s) = AD$$
$$r^2 - x^2 = R^2 - R(DE + AD)$$

Сумма отрезков в скобках равна радиусу R. Это наглядно показано в проекциях на ось O_3. Эта проекционная ось O_3 параллельна радиусу AE, поэтому и здесь углы φ в уравнении относительно неё определяются однозначно. Подставляем в уравнение значения отрезков и находим, что длина неизвестного радиуса равна радиусу ортогональной окружности:

$$r^2 - x^2 = R^2 - R \cdot R = 0$$
$$r^2 \equiv x^2$$

Тем самым доказано, что окружность H радиусом EH = r проходит также и через инверсные точки B и C. Поскольку на угол φ мы не накладывали никаких условий, все эти выкладки относятся к *любому* его значению. Поэтому следует считать доказанным, что все окружности, ортогональные к окружности A, проходят также и через две инверсные точки B и C, сформированные на основе уравнения AB × AC = R^2 (1) и уравнений (2) и (3).

Полученное решение даёт возможность провести геодезическую на диске Пуанкаре через *любые* две точки. Опишем пошагово метод построения такое геодезической. Для удобства точкам присвоим выбранные выше названия.

1. На диске Пуанкаре проводим линию из центра А через первую из двух произвольных точек, точку В.

2. Восстанавливаем перпендикуляр к этой первой точке В искомой геодезической до пересечения с окружностью, абсолютом диска Пуанкаре в точке Е.

3. Проводим касательную в точке Е до пересечения с линией АВ. Точка пересечения С является инверсией точки В и одновременно точкой всех возможных ортогональных окружностей.

4. Проводим в диске хорду между первой точкой В и второй точкой Р искомой геодезической.

5. Восстанавливаем перпендикуляры к центрам хорды ВР и отрезка ВС. Линия пересечения перпендикуляров является центром искомой ортогональной к А окружности.

Иллюзии кривизны

Следует различать *пространство* и геометрический *объект*. Пространство характеризуется измерениями и координатной сеткой, а объект – своими геометрическими размерами *внутри* пространства, в его координатной сетке. Кривизна *пространства* отличается от кривизны *объекта*, кривизна *поверхности* которого определяется *внешним* взглядом. Кривизна пространства с точки зрения его обитателей, *внутренняя* определяется тем, какую координатную сетку в нём нанести. Отождествление пространства и объекта ведёт к тому, что реально *плоское* пространство может быть *диагностировано* как искривлённое [79], [73].

Диск и шар Римана

Трёхмерное эллиптическое пространство положительной кривизны

В математике и в физике рассматриваются пространства различного числа измерений и различной кривизны. Наиболее известны три из них: плоские пространства Евклида и искривлённые пространства: пространства отрицательной кривизны Лобачевского и пространства положительной кривизны Римана.

В искривлённых пространствах аналогами прямой линии Евклида объявлены так называемые геодезические или линии наименьших расстояний между точками, наикратчайшие линии. Как правило, построения в криволинейных пространствах заметно более сложны, чем в плоских пространствах Евклида, тем более, в пространствах с числом измерений более двух.

Для упрощения таких построений, в частности, в двухмерном пространстве Лобачевского был разработан Пуанкаре специфический диск, фактически охватывающий бесконечное пространство. На *плоский* диск проецируется двухмерное *искривлённое* пространство. Описания какого-либо подобия диска Пуанкаре для *трёхмерного* пространства Лобачевского в литературе мы не встретили. Наши собственные исследования показали, что такое подобие всё-таки возможно. Мы предложили модель сферы Лобачевского, своеобразного аналога диска Пуанкаре для трёхмерного пространства отрицательной кривизны [84].

Эти же исследования естественным образом подняли вопрос о возможности создания таких же диска и сферы для пространств *положительной* кривизны Римана. И в этом случае выяснилось, что такие системы возможны. Мы дали им очевидное наименование – диск и сфера (шар) Римана. Следует заметить, что название "диск Римана" не совсем

верно. Дело в том, что под диском подразумевается круг, имеющий *толщину*. Правильнее говорить "круг Римана", подчёркивая этим, что объект толщины не имеет. Однако мы будем придерживаться традиционных обозначений и не будем без особой необходимости противопоставлять диск кругу, а шар – сфере.

Очевидно, что предложенный диск Римана можно рассматривать как своеобразную проекцию сферы на плоскость. Как и сфера, диск описывает лишь ограниченную область пространства, занимаемого кругом соответствующего радиуса. Поскольку геодезическими на сфере являются большие круги, на диске их проекциями и, соответственно, геодезическим становятся проекции кругов – эллипсы.

Геометрические построения произвольных криволинейных фигур на диске Римана не имеют никаких сложностей. Напротив, для геометрических построений на таком диске с использованием геодезических, эллипсов возникает необходимость их корректного построения с предопределёнными характеристиками. Главной задачей в этом случае становится необходимость проведения геодезической, эллипса, наикратчайшей линии через две произвольно заданные точки. Решение этой задачи приводится в первой части данной работы.

Во второй части мы рассматриваем сферу (шар) Римана – специфическую эмуляцию *трёхмерного* пространства положительной кривизны Римана. В литературе и в интернете мы не встретили никаких упоминаний о возможности таких построений. Как правило, рассматриваются лишь двухмерные пространства положительной кривизны, поверхности сфер.

Трёхмерное пространство положительной кривизны мы поместили в шар конечных размеров. В отличие от

диска Римана, в шаре все объекты имеют теперь уже явные три координаты. Положительная кривизна пространства привела к тому, что здесь, как и в сфере Лобачевского, появился новый класс геодезических – геодезические *поверхности, двухмерные пространства*. В их качестве естественным образом выступили эллипсоиды с двумя равными осями, то есть, сфероиды.

1. Вращение эллипса на диске Римана

На начальном этапе исследования диска Римана рассмотрим основную задачу на построение эллипсов: проведение эллипса через две произвольно заданные точки [69]. Эти две точки образуют треугольник с вершиной в начале координат. Задачу такого построения можно выполнить в два этапа: построить *базовый* эллипс, то есть, эллипс с полуосями, совпадающими с осями координат, и проходящего через треугольник, подобный треугольнику, заданному исходными точками. После этого эллипс можно повернуть до его прохождения через эти заданные точки. Для осуществления второго этапа рассмотрим соответствующую задачу – вращение какого-либо *базового* эллипса на диске. Рассматриваем только эллипсы, имеющие большую полуось, равную радиусу диска Римана. Сформулируем задачу.

Итак, у нас задан диск Римана, круг радиуса R, в котором нарисован эллипс с большой полуосью a = R, расположенной горизонтально, и с произвольной малой полуосью b. Требуется повернуть этот эллипс вокруг центра круга на произвольный угол φ. Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1.1)$$

Поскольку сумма квадратов равна единице, представим её как сумму квадратов синуса и косинуса некоторого отвлечённого параметра

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\omega+\sin^2\omega$$

Разделим попарно переменные по смыслу

$$\frac{x^2}{a^2}-\cos^2\omega=\sin^2\omega-\frac{y^2}{b^2}$$

Это равенство, видимо, равно также и квадрату некоторой другой, третьей величины

$$\frac{x^2}{a^2}-\cos^2\omega=\sin^2\omega-\frac{y^2}{b^2}=S^2 \qquad (1)$$

Или в другом, раздельном виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\cos^2\omega=S^2$$

$$\sin^2\omega-\frac{y^2}{b^2}=S^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-S^2=\cos^2\omega$$

$$\frac{y^2}{b^2}+S^2=\sin^2\omega$$

Преобразуем

$$\frac{x^2-a^2S^2}{a^2}=\cos^2\omega$$

$$\frac{y^2+b^2S^2}{b^2}=\sin^2\omega$$

$$x^2-a^2S^2=a^2\cos^2\omega$$

$$y^2+b^2S^2=b^2\sin^2\omega$$

Возможны несколько вариантов. Первый: S = 0

$$x^2 = a^2 \cos^2 \omega$$

$$y^2 = b^2 \sin^2 \omega$$

Отсюда получаем традиционную систему параметрических уравнений эллипса с центром в начале координат

$$\begin{cases} x = a\cos\omega \\ y = b\sin\omega \end{cases} \qquad (2)$$

Второй простейший вариант удобно рассмотреть для единичного значения константы S = 1

$$x^2 - a^2 = a^2 \cos^2 \omega$$

$$y^2 + b^2 = b^2 \sin^2 \omega$$

Уравнения выглядят достаточно близко к параметрическим

$$x = a\sqrt{\cos^2 \omega + 1}$$

$$y = b\sqrt{\sin^2 \omega - 1}$$

$$x = a\sqrt{\cos^2 \omega + 1}$$

$$y = b\sqrt{\sin^2 \omega - \sin^2 \omega - \cos^2 \omega} = b\sqrt{-\cos^2 \omega}$$

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos^2 \omega + 1} \\ y = b\sqrt{-\cos^2 \omega} \end{cases}$$

Такую систему параметрических уравнений следует, видимо, отнести к некоторому мнимому объекту. Однако в настоящий момент этот вариант интереса для нас не представляет. Третий вариант можно представить в расширенном параметрическом виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \cos^2 \omega = c^2 \sin^2 \omega$$

$$\sin^2 \omega - \frac{y^2}{b^2} = c^2 \sin^2 \omega$$

Преобразуем

$$\frac{x^2}{a^2} = c^2 \sin^2 \omega + \cos^2 \omega$$

$$-\frac{y^2}{b^2} = c^2 \sin^2 \omega - \sin^2 \omega$$

$$x^2 = a^2 \cos^2 \omega + a^2 c^2 \sin^2 \omega$$

$$y^2 = b^2 \sin^2 \omega - b^2 c^2 \sin^2 \omega$$

$$x = a\sqrt{\cos^2 \omega + c^2 \sin^2 \omega}$$

$$y = b\sqrt{\sin^2 \omega - c^2 \sin^2 \omega}$$

К этой системе уравнениям есть смысл добавить и введённое значение переменной S, представив её как третью координату

$$x = a\sqrt{\cos^2 \omega + c^2 \sin^2 \omega}$$

$$y = b\sqrt{\sin^2 \omega - c^2 \sin^2 \omega} = b \sin \omega \sqrt{1 - c^2}$$

$$z = c \sin \omega$$

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos^2 \omega + c^2 \sin^2 \omega} \\ y = b \sin \omega \sqrt{1 - c^2} \\ z = c \sin \omega \\ |c| \le 1 \end{cases}$$

Три уравнения этой системы описывают некое тело в трёхмерном пространстве. Для каждого значения параметра *c* мы получаем соответствующую систему уравнений. При нулевом значении – это обычное параметрическое уравнение эллипса. При меняющемся значении параметра ω, система выглядит как описание какой-то волнообразной "спирали", спирали с переменной амплитудой вдоль оси z.

Есть ещё один, четвертый вариант. Рассмотрим вновь каноническое уравнение эллипса (1)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{2c^2}$$

Выделяем две смысловые группы и преобразуем

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{2c^2}$$

$$1-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{2c^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{2c^2}=0$$

$$1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{2c^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{2c^2}=-\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{2c^2}\right)$$

В результате получаем "каноническое" уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{2c^2}=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{2c^2}-1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

Судя по всему, это уравнение описывает своеобразную "эллиптическую" двухстороннюю воронку с главной осью вдоль оси x. Каждое сечение этого объекта ортогонально оси x даёт эллипс, радиусы которого возрастают квадратично по мере удаления от центра системы координат.

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=f(x^2)$$

$$\frac{z^2}{c^2 f(x^2)}+\frac{y^2}{b^2 f(x^2)}=1$$

Для решения поставленной задачи нам понадобятся как это каноническое (1.1), так и параметрическое уравнения эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos\omega \\ y = b\sin\omega \end{cases} \qquad (1.2)$$

Рассматривать будем только верхнюю половину эллипса, рассчитывая в дальнейшем отнести её к классу геодезических в рамках пространства некоторой окружности. Этот выбор мы обосновываем тем, что в системе координат Земли, на сфере рассматриваются обычно не большие круги целиком, а только их половины – меридианы.

Результат поворота эллипса будем фиксировать по перемещению некоторой точки C, закреплённой на построенном исходном, базовом эллипсе. Проведём к этой точке линию, вектор из центра круга. Для определённости назовем эту линию 0C радиусом C эллипса, подразумевая его полное название – радиус-вектор эллипса в точке C. Согласно параметрическим уравнениям эллипса, координаты точки определяются системой

$$x_C = a\cos\omega$$

$$y_C = b\sin\omega$$

При заданных координатах точки C три других параметра оказываются взаимосвязанными. А именно: для рассматриваемого нами варианта описанной окружности радиуса R, равного большой полуоси эллипса, однозначно

определёнными становятся малая полуось эллипса и угол наклона вектора C.

При вращении эллипса все его точки, в том числе и C, останутся на неизменном удалении от центра. Как видим на рисунке рис.1.1, линия эллипса при его параметрическом построении образуется движением некоторой точки G по внешнему радиусу круга. При этом координаты точек эллипса образуются как проекции двух разных окружностей. Можно заметить, что при инверсной комбинации проекций будет построен ортогональный эллипс.

Квадрат длины введённого радиус-вектора C равен

$$R_C^2 = x_C^2 + y_C^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega \qquad (1.3)$$

Угол α назовём углом радиуса C. Величину угла определим из соотношения

$$tg\alpha = \frac{b}{a}tg\omega \quad \rightarrow \quad \alpha = arctg\left(\frac{b}{a}tg\omega\right) \qquad (1.4)$$

Для поворота эллипса вокруг центральной точки на некоторый произвольный угол φ, вычислим координаты всех его точек как проекции всех повернутых *радиусов* эллипса.

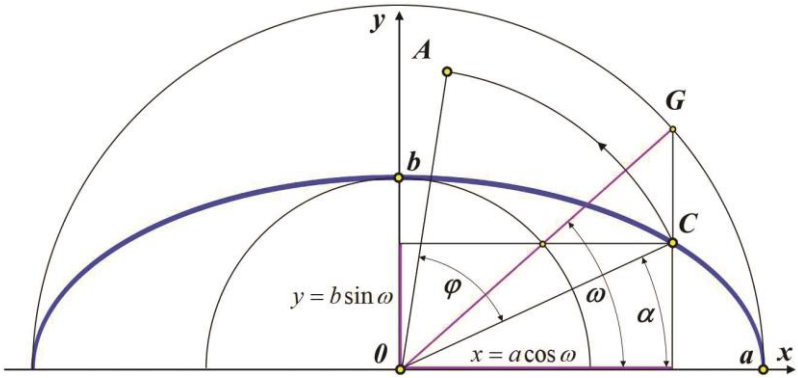


Рис.1.1. Поворот эллипса до прохождения через произвольно заданную точку A. Радиусы равны: A0 = C0. Для верхней части эллипса решение единственное.

В результате такого поворота на угол φ, координаты точки С изменятся, то есть перейдут в некоторую пока неизвестную нам точку А:

$$x_A = R_C \cos(\alpha + \varphi)$$
$$y_A = R_C \sin(\alpha + \varphi)$$

Решим эту систему совместно с уравнением (1.3)

$$\begin{aligned} x_A &= \cos(\alpha + \varphi)\sqrt{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega} \\ y_A &= \sin(\alpha + \varphi)\sqrt{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega} \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Подставим в систему значение найденного угла α из (1.4), в результате чего получим новую систему, содержащую только переменный параметр ω и известные величины

$$\begin{aligned} x &= \cos\left(arctg\left[\frac{b}{a} tg\,\omega\right] + \varphi \right)\sqrt{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega} \\ y &= \sin\left(arctg\left[\frac{b}{a} tg\,\omega\right] + \varphi \right)\sqrt{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega} \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Полученная *параметрическая* система позволяет повернуть эллипс с полуосями (a = R, b) на произвольный угол φ. На рисунке рис.1.2 представлены эллипсы, повёрнутые на разные углы с помощью полученной системы уравнений.

Сформированная система уравнений позволяет повернуть эллипс на любой угол. Но она также позволяет решить и обратную задачу: определить угол поворота, при котором эллипс пройдёт через заранее заданную произвольную точку.

Очевидно, что через любую точку в пределах рассматриваемого круга можно провести неограниченное число эллипсов, различающихся малой полуосью. Поэтому мы рассмотрим более жёсткие условия, частный вариант эллипса, у которого *задана* также и вторая полуось. Можно заметить, что таких эллипсов, проходящих через одну

точку в круге, существует только два, поскольку эллиптическая кривая замкнута, буквально, имеет две стороны. Поэтому для определённости, однозначности выше мы решили рассматривать только половину эллипса, его верхнюю дугу.

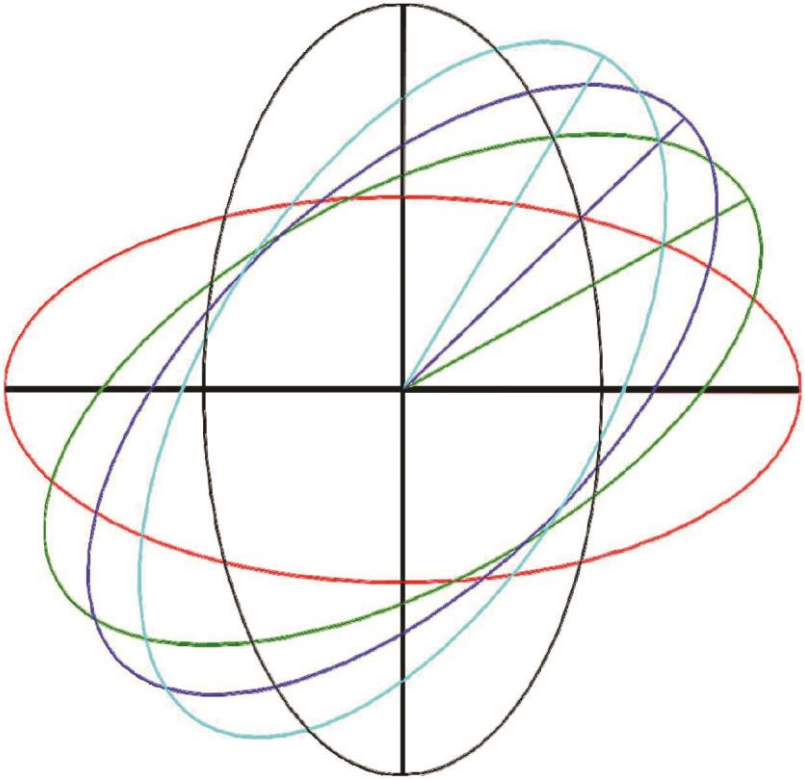


Рис.1.2. Эллипсы, образованные программным поворотом основного эллипса (красного) на разные углы

Легко заметить, что эллипс с указанными характеристиками может пройти только через точки, находящиеся в области *кольца*, образованного его радиусами. Процесс вращения означает движение по дуге точки C эллипса в точку A. Длина исходного радиуса C0 при этом равна длине нового, целевого радиуса A0

$$R_C = \sqrt{b^2 \sin^2 \omega + a^2 \cos^2 \omega} = \qquad (1.7)$$
$$R_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

Угол φ между векторами в уравнениях (1.6) – это искомый угол, на который нужно повернуть эллипс для его прохождения через точку А.

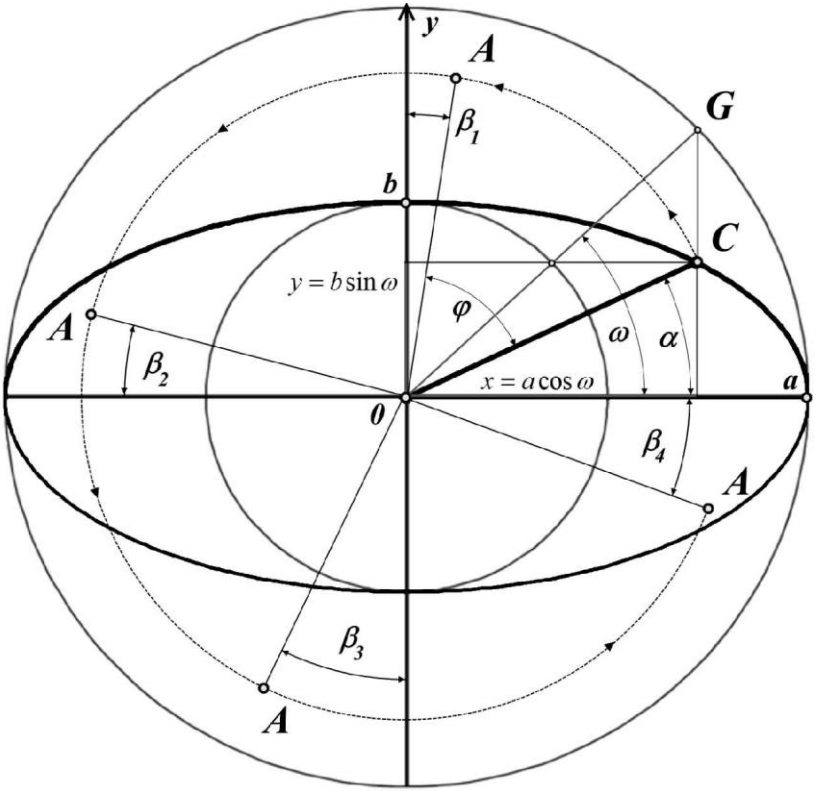


Рис.1.3. Вращение эллипса до совмещения с произвольно выбранной точкой А. Определение параметров углов целевой точки А.

Очевидно, этот угол зависит от того, в каком квадранте находится точка А. Действительно, для каждого из квадрантов запишем

$I-квадрант \qquad \varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha-\angle A0y=\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta_1$

$II-квадрант \qquad \varphi=\pi-\alpha-\angle A0x=\pi-\alpha-\beta_2$

$III-квадрант \qquad \varphi=\frac{3}{2}\pi-\alpha-\angle A0y=\frac{3}{2}\pi-\alpha-\beta_3$

$IV-квадрант \qquad \varphi=2\pi-\alpha-\angle A0x=2\pi-\alpha-\beta_4$

Эти разнообразные определения угла φ желательно свести к некоторой единой системе. Для создания такой системы изменим запись уравнений. Для всех четырёх квадрантов получаем

$$\varphi_1=\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)-\alpha$$

$$\varphi_2=\left(\pi-\beta_2\right)-\alpha$$

$$\varphi_3=\left(\frac{3}{2}\pi-\beta_3\right)-\alpha$$

$$\varphi_4=\left(2\pi-\beta_4\right)-\alpha$$

Для определения характеристик углов β, расшифруем их, представим в координатах соответствующих точек А

$$\varphi_1=\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{x_A}{y_A}\right)-\alpha$$

$$\varphi_2=\left(\pi-arctg\frac{y_A}{x_A}\right)-\alpha$$

$$\varphi_3=\left(\frac{3}{2}\pi-arctg\frac{x_A}{y_A}\right)-\alpha$$

$$\varphi_4=\left(2\pi-arctg\frac{y_A}{x_A}\right)-\alpha$$

Далее для наглядности пометим *значками* минуса отрицательные координаты. Подчеркнём, в данном случае

эти значки просто обозначают, что соответствующая координата имеет отрицательное значение

$$\varphi_1 = \left(\frac{\pi}{2} - arctg \frac{x_A}{y_A} \right) - \alpha$$

$$\varphi_2 = \left(\pi - arctg \frac{y_A}{-x_A} \right) - \alpha$$

$$\varphi_3 = \left(\frac{3}{2}\pi - arctg \frac{-x_A}{-y_A} \right) - \alpha$$

$$\varphi_4 = \left(2\pi - arctg \frac{-y_A}{x_A} \right) - \alpha$$

Из этих расшифровок выводим условия использования той или иной строки определения угла в скобках:

1. x > 0, y > 0
2. x < 0, y > 0
3. x < 0, y < 0
4. x > 0, y < 0

Теперь мы должны взять положительные значения, модули дробей под функциями арктангенса

$$\varphi_1 = \left(\frac{\pi}{2} - arctg \left| \frac{x_A}{y_A} \right| \right) - \alpha$$

$$\varphi_2 = \left(\pi - arctg \left| \frac{y_A}{-x_A} \right| \right) - \alpha$$

$$\varphi_3 = \left(\frac{3}{2}\pi - arctg \left| \frac{-x_A}{-y_A} \right| \right) - \alpha$$

$$\varphi_4 = \left(2\pi - arctg \left| \frac{-y_A}{x_A} \right| \right) - \alpha$$

С учётом модулей под знаками арктангенсов введём новые обозначения. Углы β, представленные арктангенса-

ми, в уравнении разные, поэтому обозначим их индексами, означающими, какая координата в дроби под арктангенсом находится сверху, а какая – снизу.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{\pi}{2} - \beta_y^x - \alpha && x_A > 0;\ y_A > 0 \\
\varphi_2 &= \pi - \beta_x^y - \alpha && x_A < 0;\ y_A > 0 \\
\varphi_3 &= \frac{3}{2}\pi - \beta_y^x - \alpha && x_A < 0;\ y_A < 0 \\
\varphi_4 &= 2\pi - \beta_x^y - \alpha && x_A > 0;\ y_A < 0
\end{aligned} \qquad (1.8)$$

Уточним: в данных уравнениях верхний и нижний индексы при β не имеют обычного математического смысла, это просто метки, что в соответствующей функции арктангенса числителем и знаменателем являются координаты, занимающие соответствующее индексу место.

Поскольку координаты точки А заданы условиями задачи, этот угол β также однозначно определён. Второй угол – α позволяет определить значение параметрического угла ω, при котором и образуется вращаемый вектор С0. Рассмотрим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

После преобразований получаем

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Используем это уравнение в условии равенства исходного радиуса С0 и радиуса А0, в который он должен переместиться

$$R_C = y_C^2 + x_C^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_C^2) + x_C^2 = R_A = y_A^2 + x_A^2 \qquad (1.9)$$

Преобразуем

$$x_C^2 = \frac{a^2 y_A^2 + a^2 x_A^2 - b^2 a^2}{a^2 - b^2} \qquad (1.10)$$

$$x_C = \sqrt{\frac{a^2 y_A^2 + a^2 x_A^2 - b^2 a^2}{a^2 - b^2}} \qquad (1.11)$$

Из уравнений (1.10) и (1.9) находим вторую координату

$$y_C^2 + x_C^2 = y_A^2 + x_A^2$$

$$y_C^2 = y_A^2 + x_A^2 - x_C^2$$

$$y_C^2 = y_A^2 + x_A^2 - \frac{a^2 y_A^2 + a^2 x_A^2 - b^2 a^2}{a^2 - b^2}$$

$$y_C = \sqrt{y_A^2 + x_A^2 - \frac{a^2 y_A^2 + a^2 x_A^2 - b^2 a^2}{a^2 - b^2}} \qquad (1.12)$$

Уравнения (1.11) и (1.12) содержат только известные величины, поэтому из них мы можем найти искомый угол α

$$\alpha = arctg\frac{y_C}{x_C} = arctg\sqrt{\frac{y_A^2 + x_A^2 - \frac{a^2 y_A^2 + a^2 x_A^2 - b^2 a^2}{a^2 - b^2}}{\frac{a^2 y_A^2 + a^2 x_A^2 - b^2 a^2}{a^2 - b^2}}} \qquad (1.13)$$

Преобразуем

$$\alpha = arctg\sqrt{\frac{(y_A^2 + x_A^2)(a^2 - b^2) - (a^2 y_A^2 + a^2 x_A^2 - b^2 a^2)}{a^2 y_A^2 + a^2 x_A^2 - b^2 a^2}}$$

Упростим выражение в числителе под корнем

$$(y_A^2 + x_A^2)(a^2 - b^2) - (a^2 y_A^2 + a^2 x_A^2 - b^2 a^2) =$$

$$y_A^2(a^2 - b^2) + x_A^2(a^2 - b^2) - a^2 y_A^2 - a^2 x_A^2 + b^2 a^2 =$$

$$y_A^2 a^2 - y_A^2 b^2 + x_A^2 a^2 - x_A^2 b^2 - a^2 y_A^2 - a^2 x_A^2 + b^2 a^2 =$$

$$a^2 y_A^2 - a^2 y_A^2 - b^2 y_A^2 + a^2 x_A^2 - a^2 x_A^2 - b^2 x_A^2 + b^2 a^2 =$$

$$b^2 a^2 - b^2 y_A^2 - b^2 x_A^2$$

Подставляем в предыдущее, исходное уравнение

$$\alpha = arctg\sqrt{\frac{b^2a^2 - b^2y_A^2 - b^2x_A^2}{a^2y_A^2 + a^2x_A^2 - b^2a^2}}$$

На рисунке рис.1.3 можно увидеть, что в общем случае, для всех вариантов расположения точки А для i = 1...4 справедливо равенство, из которого находим угол φ

$$\beta_i + \varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}i$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}i - \beta_i - \alpha$$

Сравниваем это выражение с (1.8) и исправляем последнее

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \beta_y^x - \alpha & x_A > 0;\ y_A > 0 \\ \varphi_2 &= \beta_x^y - \alpha & x_A < 0;\ y_A > 0 \\ \varphi_3 &= \beta_y^x - \alpha & x_A < 0;\ y_A < 0 \\ \varphi_4 &= \beta_x^y - \alpha & x_A > 0;\ y_A < 0 \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Подставляем вычисленные параметры и определяем искомый угол поворота φ

$$\varphi = arctg\frac{x_A}{y_A} - arctg\sqrt{\frac{b^2a^2 - b^2y_A^2 - b^2x_A^2}{a^2y_A^2 + a^2x_A^2 - b^2a^2}} \qquad (1.15)$$

Используя это уравнение угла, мы можем повернуть исходный эллипс с полуосями (a = R, b) до прохождения его через заданную точку А. На следующем рисунке представлены два примера таких вращений

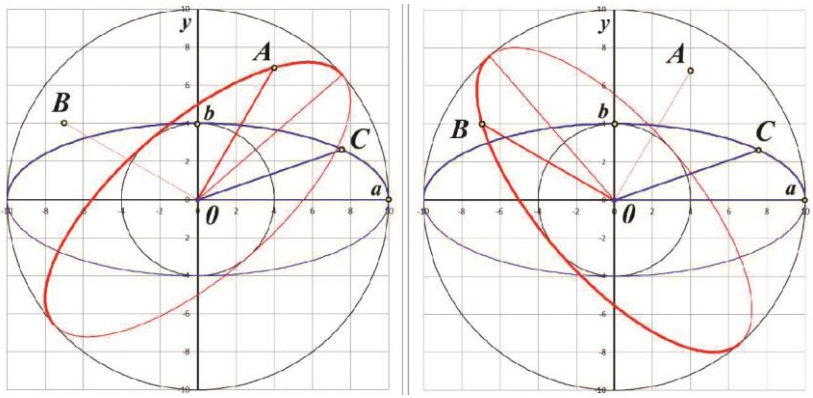


Рис.1.4. На исходном эллипсе выбрана произвольная точка С. Эллипс (верхняя половина) повёрнут вокруг своей центральной точки так, что в новых положениях точка С совместилась с точкой А или с точкой В. Радиусы точек равны: С0 = А0 = В0

2. Проведение эллипса через 2 точки

Все эллипсы, формируемые в дальнейших рассуждениях, как и в рассмотренной задаче, имеют одинаковую большую полуось, поэтому все построения по-прежнему рассматриваем как построения в рамках круга, имеющего радиус большой полуоси этих эллипсов. Мы рассмотрели вращение эллипса с *заданными*, фиксированными полуосями с тем, чтобы эллипс прошёл через произвольную, также заданную точку. Далее мы ставим цель провести эллипс теперь уже через две *произвольно* заданные точки.

Для решения этой задачи, рассмотрим предварительный вариант. В этом варианте мы не устанавливаем значение малой полуоси эллипса, а попытаемся определить её зависимость от точки, через которую эллипс должен пройти. Иначе говоря, проведём *разные* эллипсы через *единственную* заданную точку. Эту произвольную точку А зададим уравнением

$$A0^2 = R_A^2 = x_A^2 + y_A^2 \qquad (2.1)$$

Радиус-вектор R_A – это удалённость точки А от центра эллипса. Повторим, что точка обязательно должна находиться в *кольце* эллипса, то есть, радиус А0 должен быть больше малой полуоси и, понятно, меньше большой полуоси эллипса. Для построения эллипса используем параметрические уравнения (1.2)

$$x = a\cos\omega$$

$$y = b\sin\omega$$

Полуоси этого эллипса, который мы называем базовым, расположены вдоль осей координат. Выбираем значения полуосей (a = R, b) и строим эллипс, показанный на рис.1.1. На рисунок нанесены необходимые для вычислений вспомогательная точка С, которая находится на линии эллипса, и целевая точка А.

Напомним, что линию 0С мы назвали радиусом R_C эллипса, полное название – радиус-вектор эллипса в точке С. Соответственно, угол α назван углом радиуса С. Для вращения эллипса мы разработали систему параметрических уравнений (1.6, 1.15) для эллипса с заданной большой полуосью a = R и варьируемой малой полуосью b = r. Путём вращения эллипс проводится через некоторую, произвольно заданную точку А. Угол вращения φ определяется координатами этой точки.

Сущность проведения эллипса через произвольную точку А можно описать следующим образом. Сначала мы строим некоторый фиксированный *произвольный* базовый эллипс (a = R, b) с горизонтально расположенной большой полуосью и *произвольно* выбранной малой полуосью b. После построения такого исходного эллипса мы вращаем его вокруг центра до совмещения с точкой А. Понятно, что такое решение, как и в предыдущем варианте, фактически определяет бесконечное множество разных эллипсов, раз-

личающихся малой полуосью. Просто меняя величину малой полуоси, мы получим соответствующие разные эллипсы, проходящие через заданную точку. Поскольку каждый эллипс может пройти через эту точку одной из *двух* своих сторон, мы рассматриваем только одну их сторону. Этот выбор ранее мы обосновали тем, что в системе координат Земли, на сфере рассматриваются обычно не большие круги целиком, а только их половины – меридианы. На следующем рисунке изображены такие разные полу-эллипсы, проходящие через заданную точку А

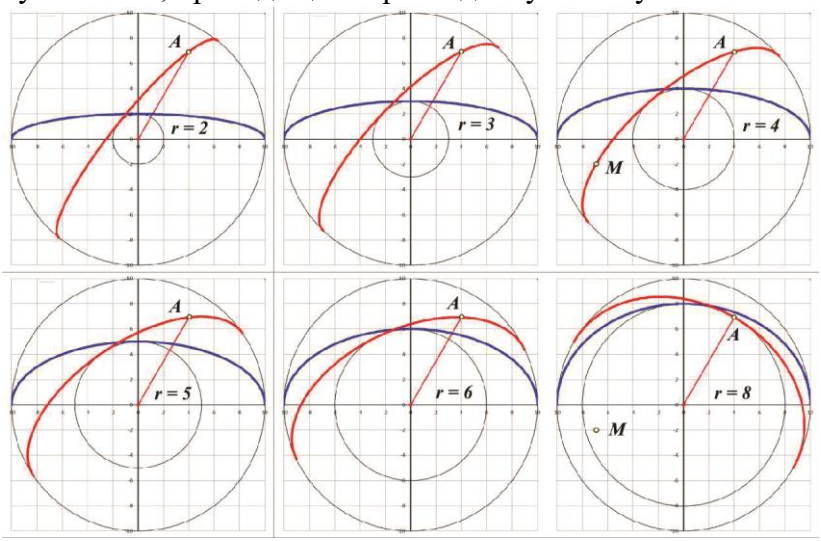


Рис.2.1. При изменении малой полуоси исходного, синего полу–эллипса и неизменной большой, эллипс вращается и пересекает всю область круга. Полу–эллипс может пройти через две точки – А и какую-либо произвольную вторую точку М. На последнем рисунке видно, что исходный эллипс не может иметь малую полуось, длиннее вектора А0

Как видим, красный полу-эллипс всегда проходит через выбранную точку А (красный вектор) независимо от величины его малой полуоси. Синим цветом выделен "ба-

зовый" эллипс, верхняя его часть, вращением которого и была образована верхняя часть красного эллипса.

Можно сказать, что на всех рисунках изображён один и тот же эллипс в разных положениях, и у которого малая полуось вытягивается. Замечаем, что соответствующий II-квадрант такого обобщённого эллипса, его условно левая верхняя четверть полностью пересекает зону II-квадранта системы координат. Это значит, что при некотором значении его малой полуоси эллипс пройдёт через *любую* наперёд заданную вторую точку в этом квадранте. На последнем рисунке видно, что при меньшей полуоси эллипса большей, чем радиус точки А, решение отсутствует.

Фокусы эллипса

В рассмотренном предварительном варианте прохождение эллипса через некоторую вторую точку обеспечивается простым перебором, подбором длины его малой полуоси. Далее мы определим точное значение малой полуоси, для обеспечения такого пересечения второй точки.

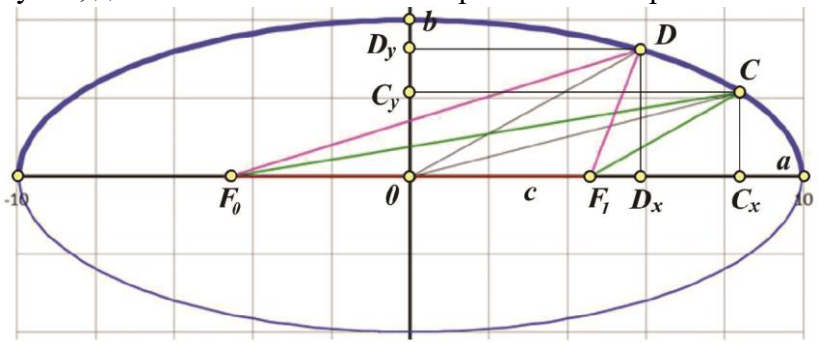


Рис.2.2. Проведение эллипса с известной большой полуосью через две заданные точки C и D или построение эллипса по двум (фактически – по трём, считая полуось) заданным точкам

Изменим рисунок рис.1.1 для определения параметров теперь уже двух вспомогательных точек C и D. Как и ранее, мы должны определить угол поворота этого эллипса, чтобы вспомогательные точки C и D совместились с другими произвольными точками, соответственно, A и B (на рисунке не показаны). При этом мы заранее устанавливаем равенство радиусов $R_A = R_C$ и $R_B = R_D$. Кроме этого, очевидно ещё одно равенство – угол между C и D равен изначально заданному углу между A и B. Угол этот обозначим символом γ. На рисунке рис.2.2 это угол C0D. Параметры вспомогательных точек определяем, используя параметр эллипса – фокус F. Взаимосвязь параметров – фокуса F и точек C и D через длины их векторов описывается следующим уравнением

$$2a = CF_0 + CF_1 = DF_0 + DF_1$$

Знаки модулей отрезков здесь не используем, поскольку это лишь их обозначения. Вычислим длины этих отрезков. Рассматриваем для первой точки C два прямоугольных треугольника F_0C_xC и F_1C_xC. Отрезки F_0C и F_1C являются гипотенузами этих треугольников, поэтому

$$\sqrt{(C_x - F_0)^2 + C_y^2} + \sqrt{(C_x - F_1)^2 + C_y^2} = 2a =$$

$$\sqrt{C_x^2 - 2C_xF_0 + F_0^2 + C_y^2} + \sqrt{C_x^2 - 2C_xF_1 + F_1^2 + C_y^2}$$

Из вычислений в предыдущей главе берём некоторые величины и делаем очевидную подстановку, замену $F = F_0 = -F_1$

$$\sqrt{R_C^2 - 2C_xF + F^2} + \sqrt{R_C^2 + 2C_xF + F^2} = 2a$$

Разносим величины с квадратными корнями по разные стороны от знака равенства и возводим в квадрат

$$R_C^2 - 2C_xF + F^2 = 4a^2 - 2a\sqrt{R_C^2 + 2C_xF + F^2} + R_C^2 + 2C_xF + F^2$$

Сокращаем

$$a\sqrt{R_C^2 + 2C_xF + F^2} = C_xF + a^2$$

Перегруппируем слагаемые и вновь возводим в квадрат

$$a^2R_C^2 + 2a^2C_xF + a^2F^2 = (C_xF)^2 + 2C_xFa^2 + a^4$$

Получаем окончательное выражение

$$F = a\sqrt{\frac{a^2 - R_C^2}{a^2 - C_x^2}} \qquad (2.2)$$

По аналогии записываем уравнение для второй точки D

$$F = a\sqrt{\frac{a^2 - R_D^2}{a^2 - D_x^2}} \qquad (2.3)$$

По заданным условиям задачи о 2-точках, у нас есть возможность определить связь между C_x и D_x, поскольку нам известен угол γ между векторами C0 и D0. В самом деле, ранее мы обозначили угол наклона вектора C0 символом α, поэтому находим

$$C_x = C0\cos\alpha = R_C\cos\alpha$$

$$D_x = D0\cos(\alpha + \gamma) = R_D\cos(\alpha + \gamma)$$

$$\alpha = \arccos\frac{C_x}{R_C}$$

$$D_x = R_D\cos(\alpha + \gamma)$$

$$D_x = R_D\cos(\arccos\frac{C_x}{R_C} + \gamma) \qquad (2.4)$$

Соответственно, инверсный вариант этого уравнения, то есть, определение C_x как функции от D_x, имеет вид

$$\frac{D_x}{R_D} = \cos(\alpha + \gamma)$$

$$\arccos\frac{D_x}{R_D} = \alpha + \gamma \qquad (2.5)$$

$$C_x = R_C \cos\left(\arccos\frac{D_x}{R_D} - \gamma\right)$$

Угол γ между векторами C и D для полученных уравнений определим, используя известные параметры заданных *целевых* точек A и B

$$\gamma = arctg\frac{B_x}{B_y} - arctg\frac{A_x}{A_y} \qquad (2.6)$$

Запишем кратко оба эти взаимосвязанные, инверсные уравнения

$$\gamma = arctg\frac{B_x}{B_y} - arctg\frac{A_x}{A_y}$$

$$D_x = R_D \cos(\arccos\frac{C_x}{R_C} + \gamma) \qquad (2.7)$$

$$C_x = R_C \cos\left(\arccos\frac{D_x}{R_D} - \gamma\right)$$

Выведенные уравнения (2.1), (2.7) и (2.2) представим в виде компактной системы уравнений

$$R_C = R_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

$$\gamma = arctg\frac{B_x}{B_y} - arctg\frac{A_x}{A_y} \qquad (2.8)$$

$$F = a\sqrt{\frac{a^2 - R_C^2}{a^2 - C_x^2}}$$

Замечаем, что система описывает множество эллипсов, проходящих через точку C, и имеющих разные фокусы F. Действительно, задаём некое произвольное значение фокуса F и из нижнего уравнения (2.8) находим соответствующее ей значение абсциссы точки C

$$F^2 = a^2 \frac{a^2 - R_C^2}{a^2 - C_x^2} \quad \rightarrow \quad a^2 - C_x^2 = \frac{a^2(a^2 - R_C^2)}{F^2}$$

$$C_x^2 = a^2 - \frac{a^2(a^2 - R_C^2)}{F^2} = \frac{a^2F^2 - a^4 + a^2R_C^2}{F^2}$$

$$C_x = \frac{a\sqrt{F^2 + R_C^2 - a^2}}{F} \qquad (2.9)$$

По некоторому, произвольно заданному значению фокуса F определяем длину малой полуоси эллипса

$$b = \sqrt{a^2 - F^2} \qquad (2.10)$$

По известному значению длины радиуса R_C находим для справки вторую координату точки C

$$C_y = \sqrt{R_C^2 - C_x^2} \qquad (2.11)$$

Меняя значения фокуса F, строим эллипсы, проходящие через заданную точку C

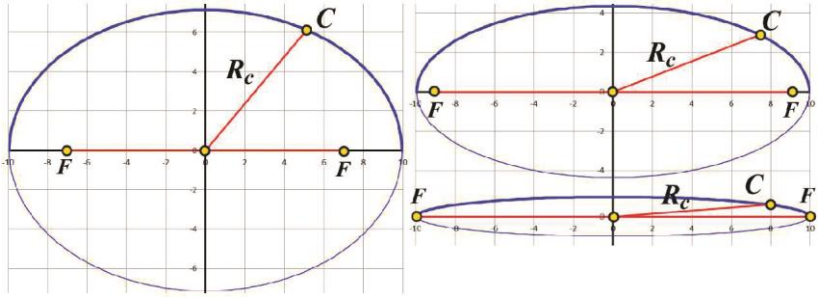


Рис.2.3. Эллипсы с разными фокусами F, проходящие через точку C, удалённую от центра эллипса на расстояние R_C

Поскольку через точку C с радиусом R_C мы можем провести любое количество эллипсов; очевидно, что какой-то из этих эллипсов обязательно пройдёт и через вторую точку – D с радиусом R_D. Как и для точки C условием такого прохождения является соответствие точки D таким

же условиям, что и C, то есть для точки D должно выполняться уравнение (2.3)

$$F = a\sqrt{\frac{a^2 - R_D^2}{a^2 - D_x^2}}$$

Из этого уравнения находим x-координату точки D и затем по длине этого вектора его y-координату

$$D_x = \frac{a\sqrt{F^2 + R_B^2 - a^2}}{F} \qquad (2.12)$$
$$D_y = \sqrt{R_B^2 - D_x^2}$$

Здесь мы сразу же учли, что длина вектора D равна по условиям задачи длине вектора B. Однако мы нашли, определили две точки для эллипса с *произвольно* выбранным фокусом F. Это означает, что угол между векторами C и D может быть *любым*, поскольку он явно определяется величиной фокуса. Действительно, согласно уравнениям (2.4) и (2.5) угол γ между векторами равен

$$\arccos\frac{D_x}{R_D} = \alpha + \gamma$$
$$\alpha = \arccos\frac{C_x}{R_C} \qquad (2.13)$$
$$\arccos\frac{D_x}{R_D} - \alpha = \gamma$$
$$\gamma = \arccos\frac{D_x}{R_D} - \arccos\frac{C_x}{R_C}$$

а проекции D_x и C_x, согласно уравнениям (2.9) и (2.12), однозначно определяются величиной фокуса F. И здесь мы замечаем ещё одну важную связь, исключающую множественность решений. Это предопределённость угла γ между векторами C и D. Согласно условиям задачи, этот угол задан равным углу между векторами A и B (2.6). Следова-

тельно, мы можем выбрать только одно значение фокуса F, значение, при котором между векторами C и D будет образован именно этот, заданный условиями задачи угол γ.

Описанные условия предопределяют последовательность построений. Сначала произведём построения, что называется, вручную, демонстрационно. Для этого изобразим на рисунке рассмотренную картину построения эллипса, проходящего через две рассмотренные точки C и D, определённые их радиус-векторами R_C и R_D и углом γ между ними. Нам необходимо убедиться, что такое решение существует и оно – единственное. Обратимся к следующему рисунку

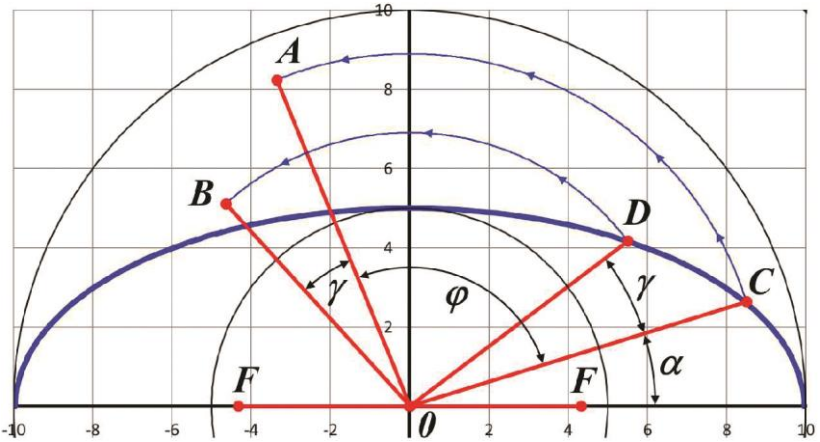


Рис.2.4. При повороте эллипса на угол φ, точки C и D на нём совместятся с точками A и B, соответственно. Углы A0B и C0D равны.

Анализируя уравнения (2.7) – (2.9) и (2.12) как систему, приходим к выводу, что простого аналитического решения система, видимо, не имеет. Переменные связаны друг с другом не только квадратичными функциями, но и тригонометрическими – косинусом и арктангенсом. С другой стороны, все переменные явно выражены друг через

друга, что позволяет образовать простую итерационную цепочку даже для ручных вычислений.

Для такого упрощённого итерационного построения эллипса используем уравнения (2.9) и (2.12). Плавно уменьшаем фокус F от ~ 9 до ~ 8,01 и каждый раз заново строим фигуры. В результате добиваемся того, что углы A0B и C0D сравнялись. Если теперь повернуть эллипс на угол φ, то точки C и D на нём совместятся с точками A и B. Такую процедуру можно назвать итерацией, правда "на глазок". Очевидно, что она не только медленная, но и неточная. Вместе с тем, эти же уравнения позволяют осуществить и более корректное и точное *программное* итерационное построение.

График итерации на диаграмме

Для отладки итерационного процесса, для его наглядного контроля, удобно использовать соответствующий процессу *график* изменений фокуса. Поскольку число итераций мы выбрали достаточно большим, порядка 3 000, возникли сложности в VBA Excel: такое большого количество точек на графике отразить оказалось сложно, фактически невозможно. Поэтому в график следует выводить не все точки, а только некоторые на этом интервале.

Если итерация быстрая, то итог будет получен буквально на первых шагах, и график будет иметь вид тонкого пика. Следовательно, желательно использовать неравномерную шкалу номеров итераций. Очевидной является экспоненциальная шкала. При наших настройках предельному значению, например, n = 3 000 должна соответствовать координата с номером на диаграмме m = 20. Коэффициент экспоненциального преобразования в этом случае определим из уравнения

$$n_i = 10^{\frac{m}{k}}$$

Здесь n_i – номер текущей, i-той итерации; m – предельное значение шкалы графика; k – параметр, связывающий эти две величины. В таблицу данных мы выводим не все значения фокуса, а только значения с некоторым интервалом.

Программная итерация

Сначала отметим, что рассмотренная задача является, по существу, обратной. На самом деле, точки C и D являются произвольными лишь методически, то есть, они полностью *предопределены* параметрами действительно произвольных точек A и B. Конечной целью преобразований является проведение эллипса именно через эти точки A и B. Цель достигается вращением вспомогательного, базового эллипса, проведённого через предопределённые точки C и D.

Для автоматического, программного построения эллипса по двум точкам, здесь это C и D, у нас есть все необходимые данные. Задан *предопределяющий* угол A0B между векторами A0 и B0, к которому нам необходимо привести угол C0D

$$\gamma = \angle B0x - \angle A0x$$

Для построения задаём некое исходное, *предельное* значение фокуса – Fi = R. По этому значению фокуса, используя уравнения (2.9) и (2.11), вычисляем координаты точки C

$$C_x = \frac{a\sqrt{F^2 + R_C^2 - a^2}}{F} = \frac{a\sqrt{F^2 + R_A^2 - a^2}}{F}$$

$$C_y = \sqrt{R_A^2 - C_x^2}$$

Сразу же определяем малую полуось (2.10)

$$b = \sqrt{a^2 - F^2}$$

По значению угла A0B = γ между векторами из (2.13) и из соотношения (2.4), связывающего координаты C_x и D_x, определяем значение координат точки D

$$D_x = R_D \cos(\alpha + \gamma)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{C_x}{R_C} \quad \rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{C_x}{R_C}$$

$$D_x = R_D \cos\left(\arccos\frac{C_x}{R_C} + \gamma\right)$$

$$D_y = \sqrt{R_D^2 - D_x^2}$$

Далее, теперь уже по вычисленному значению координаты D_x вычисляем из (2.3) новое значение фокуса F

$$F_{i+1} = a\sqrt{\frac{a^2 - R_D^2}{a^2 - D_x^2}}$$

Проверяем, насколько изменилось значение фокуса. Если изменение мало, то считаем их равным

$$\Delta = F_{i+1} - F_i$$

$$\textit{Если} \quad \Delta \sim 0 \quad \textit{то} \quad F = F_i = F_{i+1}$$

После этого совпадения вычисляем окончательные значения координат и малой полуоси эллипса. Замечено, что итерация достаточно быстрая. В рассмотренном варианте уже через 10 – 12 шагов было достигнуто приемлемо точное решение.

Итак, мы получили сначала вручную, затем программно главные параметры "базового", *предопределённого* эллипса – значения его полуосей. Теперь определяем угол его поворота, после чего – поворачиваем.

Угол, на который нужно повернуть эллипс определяется просто

$$\varphi = \angle A0x - \alpha = \angle A0x - \arccos\frac{C_x}{R_C}$$

Проверяем, пройдёт ли через точки A и B этот построенный эллипс, при его повороте на угол φ. Для проверочных построений используем уравнения вращения эллипса (1.5)

$$x_A = \cos(\alpha + \varphi)\sqrt{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega}$$

$$y_A = \sin(\alpha + \varphi)\sqrt{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega}$$

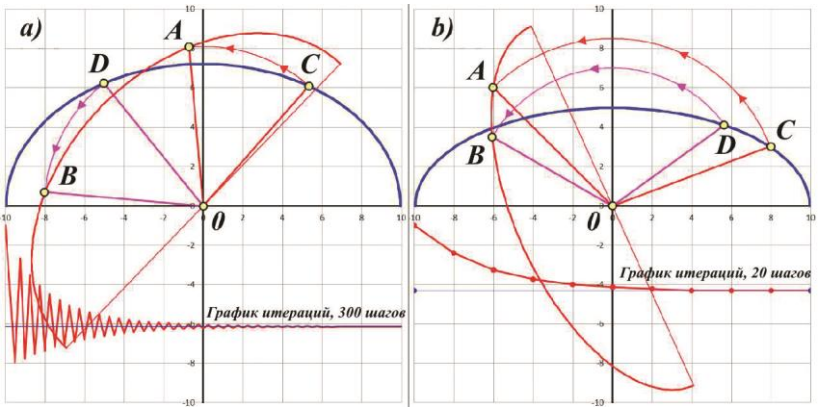


Рис.2.5. При вращении базового, синего эллипса, его точки C и D совмещаются с произвольно заданными точками A и B на эквивалентном красном эллипсе. Рисунки слева и справа различаются координатами точек назначения A и B. Точки C и D – производные. Внизу рисунков – графики итерации, показывающие число итераций, вычислений для достижения нужного значения фокуса F

Как видим, после поворота эллипс на обоих рисунках прошёл точно через две целевые точки A и B. Для наглядности на этот рисунок мы снизу добавили график итерации (красный), показывающий, как в процессе итерации фокус F приближается к своему окончательному значению – си-

няя линия. Заметно, что в варианте вращения рис.2.5b уже после 7-го шага изменяемое, подбираемое значение фокуса, красная ломаная сливается с итоговой, синей прямой. Этого количества шагов оказалось достаточно, чтобы вычислить действительное значение фокуса.

Проведём ещё один процесс вращения, с другими значениями углов и радиусов. Как видно на рис.2.5a, в этом варианте итерационных шагов оказалось заметно больше, порядка сотни. Тем не менее, значение фокуса вычислено достаточно быстро.

Итерация с прямым перебором угла

В предыдущем варианте при его визуальной эффективности были выявлены проблемы. Обнаруживались пары точек, через которые эллиптическая дуга не проходила. Для устранения проблемы и дальнейшего упрощения алгоритма было решено использовать простой последовательный рост угла производных векторов. За определяющий выбираем один из векторов, независимо от первенства по углу. Пусть это будет вектор C. У вектора D угол визуально может быть ближе или дальше, если он намного опережает угол C.

Организуем цикл роста угла C от нуля до 180 градусов, его *предельного* значения. Для каждого значения угла строим соответствующий базовый эллипс, его верхнюю дугу. Угол вектора D однозначно определяется углом между векторами A и B. Поэтому для него также строим эллипс. Оба эллипса строим, определив по уравнениям (2.2) и (2.3) их фокусы, а затем и малые полуоси.

Рост угла вектора C приводит к тому, что эти два эллипса начинают сближаться. Величину прироста угла C берём равной некоторой *доле* от разницы малых полуосей этих двух эллипсов.

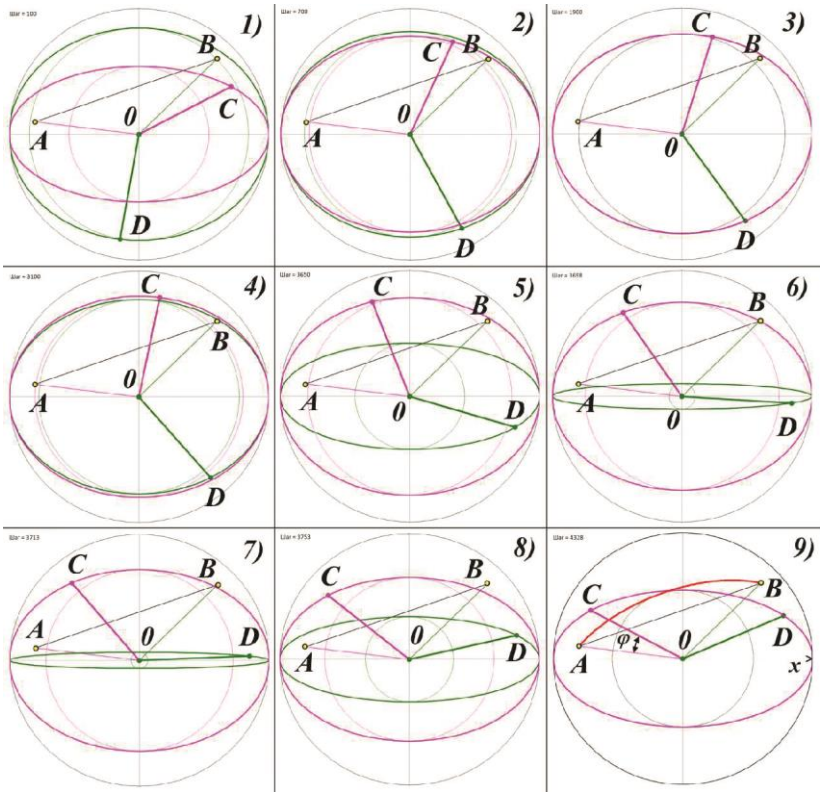


Рис.2.6. Итерационное сближение малых осей двух эллипсов (тонкие круги в центре). На рисунках рис.2.6.1-3 круги сблизились и совпали. Однако не выполнено другое условие: y-проекция радиуса D0 должна быть положительной. Поэтому на рисунках рис.2.6.4-6 прирост угла продолжен и малые круги начали "расходиться". На этапе перед рисунком рис.2.6.7 малый зелёный круг, уменьшаясь, прошёл через ноль, после чего вновь начала увеличиваться. На рисунках рис.2.6.7-9 круги вновь начали сближаться и на рисунке рис.2.6.9 слились в один. Это значит, что базовый эллипс с радиусами C-D при повороте на угол A0C своей верхней дугой пройдёт через обе заданные произвольно точки A и B. Векторы A0 = C0 и B0 = D0.

Это приводит к тому, что при сближении малых кругов этих эллипсов шаг прироста угла C уменьшается, повышая точность построения. Вместе с тем, в процессе возникла, по сути, очевидная проблема. Иногда эллипсы сливались, но точка D оказывалась на *нижней* половине, нижней дуге своего эллипса, на половине, от которой мы решили отказаться. Решением проблемы было продолжение роста угла C после первого, зеркального слияния эллипсов. Признаком первого, зеркального слияния было то, что вектор D находился в IV-ом квадранте. Поэтому после достижения первого совпадения эллипсов, процедура продолжается. Длительность итерации не превышала нескольких секунд. В конечном счете, главный результат был достигнут: проведение эллипса через *любые* две произвольные точки.

Приведём более подробное описание процесса итерации. Проводим радиус-вектор базового эллипса C0 под углом $\alpha = 0$ и радиус D0 – под отстающим углом γ к радиусу C0. Если проекция радиус-вектора $D_x < 0$, даём некоторый небольшой прирост углу α. Величину прироста угла задаём пропорциональной разнице длин полуосей

$$\Delta\alpha = \frac{|b_D - b_C|}{100}$$

Здесь делитель 100 – произвольная величина, выбранная наугад. Можно взять и 10, и 1000, что по опыту влияет лишь на время выполнения процедуры, причём довольно незначительно. По уравнениям (2.2) и (2.3) вычисляем малые полуоси двух разных эллипсов – b_C и b_D. Строим эти два эллипса на диаграмме, для наглядности, визуализации. После прироста угла α вновь вычисляем текущие значения полуосей b_C и b_D и их разницу. Если разница больше некоторой заранее заданной предельной величины, точности совпадения $\Delta b > \Delta_{min}$, увеличиваем

значение α и вычисляем новые значения полуосей эллипсов. В процессе роста угла визуально круги полуосей b_D и b_C и эллипсы D0 и C0, построенные на них, сближаются, а величина прироста угла Δα – уменьшается. Когда сближение завершается слиянием эллипсов, цикл прекращается, но только при условии $D_y > 0$. В противном случае, если $D_y < 0$, мы заметим, что на совпавших эллипсах точки C и D лежат на разных дугах суммарного, слившегося эллипса: точка C – на верхней дуге, D – на нижней. Поскольку по условиям задачи нижнюю дугу мы отбрасываем, далее мы принудительно задаем вместо предельно уменьшившегося прироста угла его новое значение

$$\begin{cases} \Delta\alpha = \dfrac{|b_D - b_C|}{100} & \textit{если} \quad \Delta\alpha \geq \Delta_{\min} \\ \Delta\alpha = \Delta_{\min} & \textit{если} \quad \Delta\alpha < \Delta_{\min} \end{cases}$$

При такой замене замечаем, что уже на первых шагах угол α начинает резко возрастать. При этом круги полуосей и их эллипсы быстро "разбегаются". Но это происходит до некоторой максимальной величины прироста, после чего вновь наблюдается сближение эллипсов и кругов. При следующем совпадении эллипсов и кругов мы получаем базовый эллипс, полуоси которого равны полуосям целевого эллипса: $b_{AB} = b_{CD}$. При повороте *базового* эллипса CD0, он совпадает с *целевым* AB0, а точки C и D совпадают с точками A и B, соответственно. Угол поворота φ определяется уравнением (рис.2.6.9, рис.2.7) после окончательного слияния эллипсов C и D

$$\varphi = \angle A0x - \angle C0x$$

$$\varphi = \angle A0x - \angle C0x$$

Поворот базового эллипса или, что тождественно, построение целевого эллипса производим по уравнению (1.6). Можно сказать иначе: мы одновременно строим два эллипса CD0 и AB0. Для первого у нас есть главный, ос-

новной параметр – полуось b. Этот эллипс строим по параметрическим уравнениям (1.2)

$$x = a\cos\omega$$

$$y = b\sin\omega$$

Второй, целевой – по уравнениям (1.6) и известному, вычисленному углу φ.

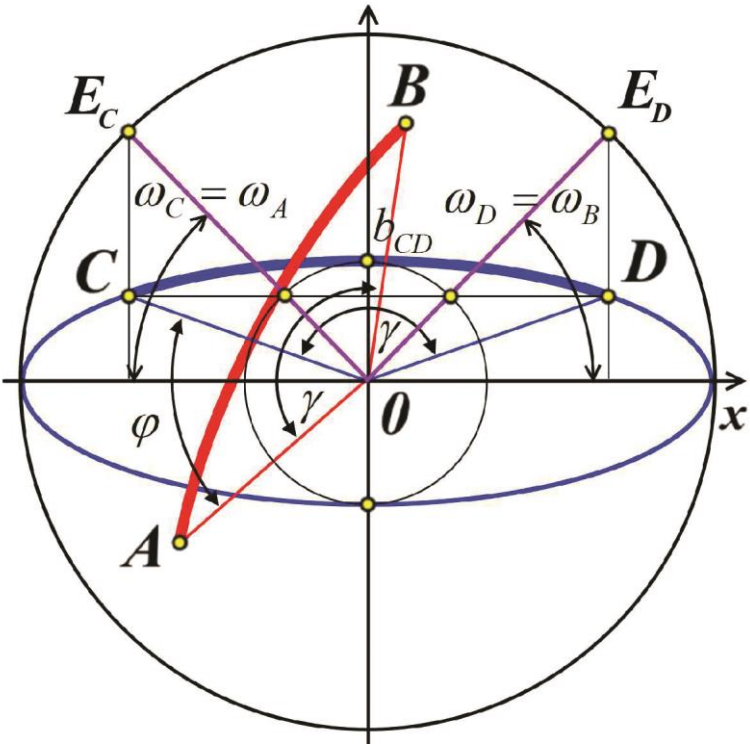


Рис.2.7. Определение полярных углов, определяющих начало ω_D и конец ω_C дуги эллипса.

Для построения не всего целевого эллипса, а только дуги между точками A и B, находим параметрические углы этих точек $\omega_A = \omega_C$ и $\omega_B = \omega_D$. Следовательно, на печать, на экран выводим только точки целевого эллипса из этого диапазона параметрических углов – рис.2.6.9 и рис.2.7. Подробнее

этот процесс описан в следующем разделе. Задача решена: между произвольными точками A и B проведена геодезическая, дуга эллипса в круге Римана.

Проведение дуги эллипса от точки до точки

Приведённые выкладки являются решением сформулированной основной задачи: проведения *полноразмерной* геодезической на диске Римана через две произвольно заданные точки. Методика позволяет производить любые построения на диске с использованием геодезических, аналогов прямых линий Евклида.

Но, как отмечено, решение даёт *полноразмерный* эллипс, проходящий через две произвольные точки. Вместе с тем, более интересной и полезной является задача проведения *отрезка* такого эллипса, отрезка, находящегося точно между этими двумя точками. Для построения такого отрезка между точками нам нужно, по сути, лишь определить начальное и конечное значения полярного угла ω и строить эллипс только в этом диапазоне.

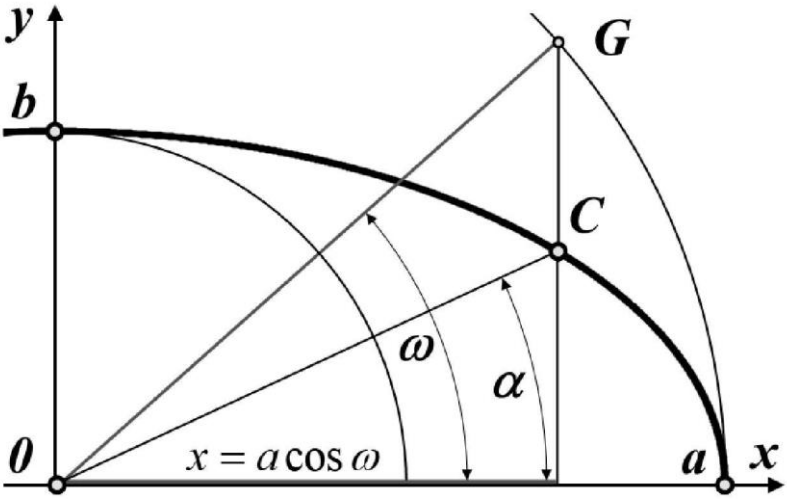


Рис.2.8. Связь векторного α и полярного ω углов точки C

Эти полярные координаты, заметим, определить довольно просто. На рисунке видим, что полярный угол, например, точки С прямо зависит от соответствующей абсциссы этой точки

$$C_x = a\cos\omega$$

В свою очередь, абсцисса зависит от угла α этого вектора С. Используем принятые в нашей в работе обозначения

$$C_x = C_r\cos\alpha$$

Сопоставляя эти два уравнения, находим

$$C_x = a\cos\omega = C_r\cos\alpha$$

Откуда находим полярный угол

$$\omega = \arccos\frac{C_r\cos\alpha_C}{a} \qquad (2.14)$$

Это выражение учитывает углы с точностью до знака, определяющего квадрант нахождения полярного вектора и формируемой им точки эллипса, поскольку углы α и ω всегда находятся в одном квадранте. Полярная координата другой точки определяется таким же уравнением. Полярный угловой диапазон отрезка эллипса, таким образом, определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \omega_C &= \arccos\frac{C_r\cos\alpha_C}{a} \\ \omega_D &= \arccos\frac{D_r\cos\alpha_D}{a} \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Здесь величины Cr и Dr обозначают длины соответствующих векторов, векторные углы α которых обозначены как α_C и α_D. Построение базового эллипса перед его вращением производим от меньшего полярного угла ω_C до большего – ω_D.

3. Фигуры на диске Римана

Использование описанного алгоритма для построения отрезка эллипса на диске Римана позволяет строить на нём различные геометрические фигуры. Фигуры должны состоять из отрезков *прямых* линий диска Римана, геодезических, каковыми являются отрезки эллипса, в нашем случае, его верхней части. Диск Римана описывает точно такое же двухмерное пространство положительной кривизны. Рассмотрим, как изменится направление вектора при его эквиугловом переносе по замкнутой траектории, по сторонам треугольника на диске Римана – рис.3.1.

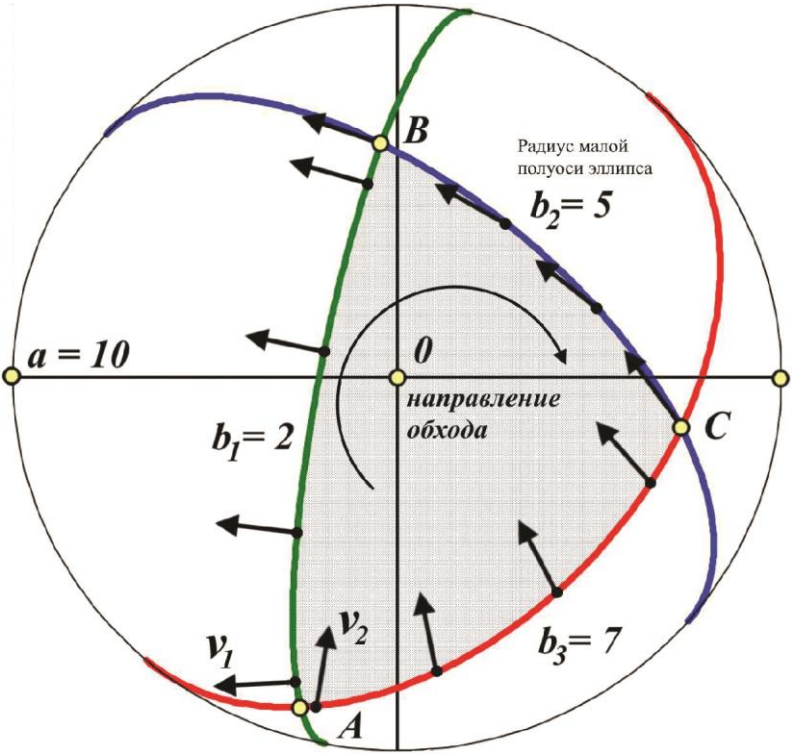


Рис.3.1. Перенос вектора по сторонам эллиптического треугольника. Символами $b_1 ... b_3$ обозначены радиусы малых полуосей эллипса

Мы используем эквиугловой перенос, поскольку параллельный перенос в искривлённых пространствах не имеет смысла [74]. Эквиугловой означает перемещение с сохранением угла относительно линии переноса, то есть, угол между вектором и каждой из сторон эллиптического треугольника неизменный.

Как видно на рисунке, при обходе эллиптического треугольника по замкнутому контуру, в начальную, исходную точку вектор $\boldsymbol{v}_1$ возвращается с изменённым направлением, вектором $\boldsymbol{v}_2$. Для построения треугольника использованы эллипсы, имеющие длины малых полуосей b_1, b_2 и b_3. Мы не рассматриваем простейшую фигуру – круг, поскольку он не может быть построен только геодезическими. Поэтому следующей по сложности простейшей фигурой можно считать четырёхугольник, в частности, квадрат рис.3.2b. На всех рисунках мы оставили тонкие контурные линии, *полноразмерные* геодезические, эллипсы, по которым построены соответствующие фигуры.

Пожалуй, предельно простой в построении эллиптической фигурой является пятиконечная звезда с центром в центре диска рис.3.2a. Образуется она простым вращением на 360:5 = 72 градуса пяти одинаковых дуг эллипса.

Отдельным интересным вариантом является квадратичная фигура – проекция гиперкуба на плоскость рис.3.2c. Заметим, что примерно так же будет выглядеть и эллиптическая *аксонометрия* обычного куба.

Рис.3.2. Эллиптические фигуры на диске Римана

Завершающая процедура построения фигур – построение по точкам. Разработан алгоритм, позволяющий строить фигуры простым последовательным перебором точек. Отрезки эллипсов проводим от некоторой текущей точки к следующей за ней. Этот способ позволяет построить практически любую фигуру, состоящую из последовательности отрезков.

4. Сфера (шар) Римана

Ранее, рассматривая диск Пуанкаре как симуляцию *двухмерного* пространства отрицательной кривизны Лобачевского, мы предложили также и *трёхмерную* симуляцию пространства Лобачевского [84], назвав её сферой Лобачевского. В данной работе мы также можем перейти от *двухмерного* пространства на диске Римана к *трёхмерному* эллиптическому пространству, симуляцию которого назовём трёхмерной сферой, шаром Римана.

Рассмотрим различия и терминологическое сходство координатных понятий на традиционной двухмерной сфере и в трёхмерном шаре Римана. На сфере, как известно, геодезическими являются наикратчайшие линии, подчеркнём – *линии*. Такими линиями являются большие круги сферы. В шаре Римана, как и в сфере Лобачевского, появляется новое понятие геодезической – это геодезическая двухмерная *поверхность*, в качестве которой мы выбрали верхнюю часть эллипсоида (сфероида). У геодезических линий есть определяющее свойство – это наикратчайшая линия между двумя точками.

Такое же минималистическое свойство можно обнаружить и у геодезических поверхностей: это поверхность *минимальной* площади, наименьшая площадь некоторого замкнутого контура, своеобразный эквивалент плоскости в пространстве Евклида.

Можно предположить, что "геодезическая" последовательность: линия – поверхность имеет продолжение. Линия принадлежит двухмерному пространству, поверхность – трёхмерному. Следовательно, что-то должно принадлежать, скажем, четырёхмерному пространству. Если рассмотреть способ перехода от линии к поверхности, то можно обнаружить их явную *интегральную* связь. Более того, первичным объектом в этой связке является точка. Первый интеграл по точке даёт нам линию. Второй интеграл по точке или первый интеграл по линии даёт уже поверхность. Интеграл по поверхности, очевидно, даёт нам объём. Получается, что следующей геодезической величиной следует считать некий *геодезический объём*. Видимо, следует считать, что такая геодезическая также обладает неким минималистическим свойством. Закономерно предположить, что это *минимальный объём* некоторого четырёхмерного объекта, хотя осознать смысл этого непросто. Если продолжить последовательность, то следующую геодезическую можно найти как результат очередного интегрирования. Как правило, четвертый интеграл уже не имеет явно выраженного пространственного свойства. В ряду точка – линия – поверхность – объём этот интеграл явно имеет свойство массы. Следовательно, очередная геодезическая – это минимальная масса. Следует признать, что этот вариант выглядит ещё более абстрактно, хотя и довольно последовательно вписывается в рассмотренный ряд.

Часто используемым свойством геодезических линий является изменение направления вектора при эквиугловом перемещении по замкнутому контуру вдоль них. Закономерно возникает вопрос, а есть ли подобное "перемещение", некий его аналог у других видов геодезических? Изменение направления вектора рассматривается как свидетельство кривизны этого двухмерного пространства. А что

можно переместить по геодезической *поверхности*? Можно предположить, что замкнутый контур из таких геодезических представляет собой просто некое тело в искривлённом трёхмерном пространстве. В двухмерном искривлённом пространстве вдоль геодезической *линии* перемещается тоже *линия*, вектор, причём с сохранением угла по отношению к линии переноса. В трёхмерном же искривлённом пространстве подобное относительное *перемещение* представить довольно трудно. Даже само понятие перемещения в этом случае вызывает массу вопросов. Ещё более сложной является ситуация с четырёхмерными объектами.

Но вернёмся к эллиптическому пространству. Все *рассматриваемые* эллиптические геодезические поверхности имеют две одинаковые оси, равные диаметру шара (сферы) Римана. Третья, переменная ось сфероида играет роль третьей координаты в шаре Римана. На рисунке рис.4.1 приведены сфероид и раздельно его верхняя и нижняя части. Такое разделение мы выбрали по тем же основаниям, что и верхнюю часть эллипса на диске Римана.

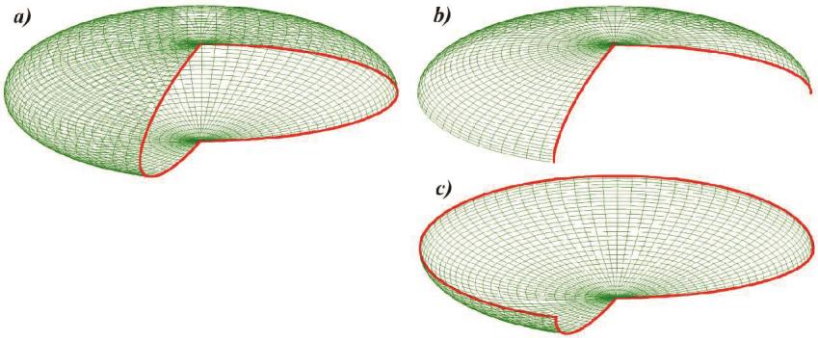


Рис.4.1. Эллипсоид (сфероид) как геодезическая поверхность: a) полный эллипсоид с разрезом; b) верхняя часть разрезанного эллипсоида, используемая в качестве геодезической поверхности в шаре Римана; c) нижняя часть эллипсоида, приведена для справки

Через любые три точки в шаре можно провести два разных эллипсоида, касающиеся этих точек либо только одной, либо двумя поверхностями. Это утверждение мы приводим без доказательств, опираясь умозрительно на такое же свойство эллипса.

За основу системы координат шара возьмём традиционную меридианную систему. Третьей, дополнительной пространственной координатой в шаре будет эллипсоид, третья ось которого, не равная другим, является переменной. Нулевое значение этой оси создаёт начальную точку этой меридианной координаты, нулевой *пространственный* меридиан. Понятно, что он имеет форму круга.

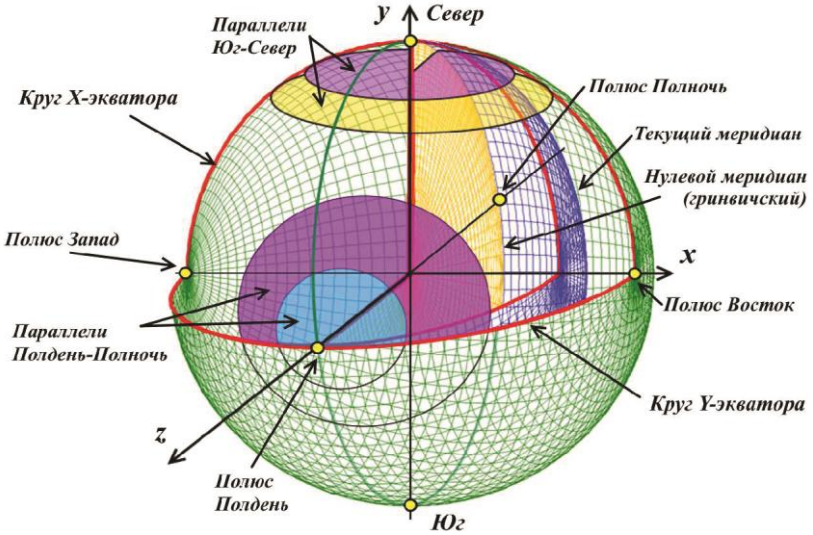


Рис.4.2. Координатная система шара Римана в терминах меридианов и параллелей

Окружность этого круга является эквивалентом полюсов на сфере: каждая из *сторон* этого круга тождественна южному или северному полюсу сферы. Параллелями являются круги, ортогональные к двум другим координатам – Y и Z. Из этого становится очевидным, что сфера,

шар Римана имеет два *пространственных* экватора – это самые большие ортогональные круги. Наибольшее и наименьшее значения оси X можно назвать, соответственно, западом и востоком шара Римана. Понятно, что экваториальные бесконечно тонкие эллипсоиды шара, *экваторы* являются двумя единственными *плоскими* параллелями, *пространственными геодезическими* шара Римана. На сфере такой единственной "прямой" параллелью, *геодезической линией* является экватор.

Координаты любой точки в шаре Римана формируются пересечением трёх поверхностей. Два диска параллелей, на которых находится точка, при пересечении образуют линию, параллельную оси X. Эта линия неизбежно пересекает и меридиан, на котором оказывается эта точка. Обозначение координат точек с использованием меридиан и параллелей имеет специфическую особенность: координаты не зависят от *физических* размеров объекта, сферы. Пример: пусть в шаре Римана диаметром 10 (метров, километров, световых лет) задана точка с декартовыми координатами M(x = 3, y = 5, z = -7). Пересчитаем эти координаты в полярные, меридианы и параллели. Круг y-параллели Север-Юг удалён от своего экватора на полярный угол, равный

$$\theta = \arcsin\left(\frac{h}{R}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{10}\right) \approx 17{,}45 \approx 17^o 28'$$

Другой круг, круг z-параллели Полночь-Полдень, виден под своим полярным углом

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{L}{R}\right) = \arcsin\left(-\frac{7}{10}\right) \approx 44{,}43 \approx 44^o 26'$$

Иначе определяется меридиан между полюсами Запад-Восток. Точка лежит на поверхности сфероида, описываемого в наших обозначениях каноническим уравнением, из которого после преобразований находим декар-

тову величину меридиана m, которую затем преобразуем в линейную угловую

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1$$

$$1-\frac{x^2}{R^2}-\frac{y^2}{R^2}=\frac{z^2}{m^2}$$

$$m=\frac{x}{\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}-\frac{z^2}{R^2}}}=\frac{3}{\sqrt{1-\frac{5^2}{10^2}-\frac{7^2}{10^2}}}=5{,}88\approx 105^o 54'$$

Линейная угловая величина на самом деле углом как таковым не является, это величина, *записываемая* как угол, в градусах. Например, если обозначить высоту трёхэтажного дома как 2π некоторых условных "метров", то высота первого этажа будет, очевидно, равна ~ 2 условным метрам или 120 градусам. Полное обозначение координат рассмотренной точки М будет звучать следующим образом: 17 градусов 28 минут северной широты, 44 градуса 26 минут полуденной широты и 105 градусов 54 минуты западной долготы [79, с.152].

Отметим, что мы использовали традиционный диапазон изменения меридианов: от – 180 до + 180 градусов. Можно сказать, что мы приносим математическую необходимость в жертву традициям. Сфера Римана при таком угловом диапазоне превращается в угловой эллипсоид. Действительно, по двум другим осям угловые диапазоны равны точно 180 градусам, а по меридианной оси, как видим, диапазон равен 360 градусам.

В отличие от шара Римана, запись координат на Земле имеет только два параметра, то есть, формально координаты описывают двухмерное пространство. Неявно третьей пространственной координатой в этом случае является так называемая "высота над уровнем моря". В космическую эру

она продлена на околоземное пространство. Заметим, что в шаре Римана возможны ещё три принципиально различающиеся формулы координат: широта – широта – широта, широта – долгота – долгота и долгота – долгота – долгота. Однако дополнительный меридиан, долгота в обозначении фактически предполагает наличие реальных *дополнительных* геометрических полюсов, таких, что, находясь на одном из них, по всем направлениям будет виден только парный ему полюс. Например, на Земле, на южном или северном полюсах отсутствует понятие Запад-Восток, все направления указывать на парный полюс.

В отличие от земных географических координат, шаровые координаты образуются не *линиями* меридианов и параллелей, а *поверхностями* сфероидных меридианов и *дисков* параллелей. На Земле самая большая параллель является экватором. Следовательно, в шаре Римана такими же экваторами являются также самые большие параллели, причём экваторов в шаре два – самые большие круги, ортогональные осям Z и Y. Соответственно, нулевым, гринвичским меридианом является такой же круг, проходящий через обе декартовы координатные оси Z и Y. Следует признать, что рисунок рис.4.2 чрезмерно загружен деталями и просматривается не очень хорошо. Поэтому приведём его в "разобранном" виде. Введение понятия геодезической *поверхности* предполагает, что такая поверхность должна быть *однозначно* определена для некоторых особых случаев, то есть, должна быть единственной. Таким особым случаем, очевидно, должно быть такое же условие, как и на диске-симуляции двухмерного эллиптического пространства положительной кривизны. Это условие гласит, что через три точки в сфере Римана проходит *единственный* эллипсоид, сфероид. Введение понятия геодезической *поверхности* предполагает, что такая поверхность должна

быть *однозначно* определена для некоторых особых случаев, то есть, должна быть единственной.

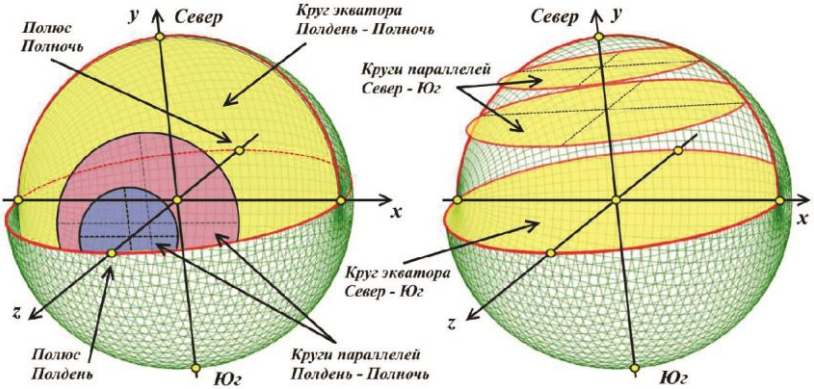


Рис.4.3. Система координат шара Римана. Слева параллели и экватор оси Z; справа параллели и экватор оси Y

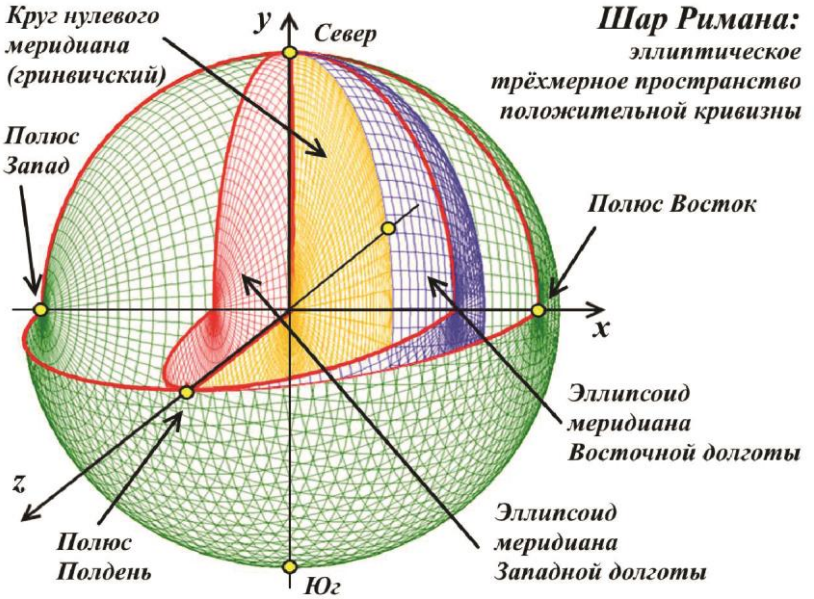


Рис.4.4. Система координат шара Римана: меридианы.

Таким особым случаем, очевидно, должно быть такое же условие, как и на диске-симуляции двухмерного эл-

липтического пространства положительной кривизны. Это условие гласит, что через три точки в сфере Римана проходит *единственный* эллипсоид, сфероид.

По сравнению с диском Римана в данном случае вместе с увеличение числа координат, увеличивается также и число точек, определяющих геодезическую. В сущности, это очевидное обстоятельство. Известно подобное правило для сферы: через три произвольные точки можно провести две сферы заданного радиуса. Мы используем "сжатые" сферы – сфероиды, одну из половин которых отбрасываем. Следовательно, вместо двух полных сфероидов у нас остаётся только один полу-сфероид. Действительно, "нижний" сфероид проходит через точки своей верхней поверхностью, нижняя отброшена. Верхний же должен пройти через точки своей нижней поверхностью, но её мы отбрасываем, отбрасывая тем самым и весь сфероид.

Исходя из этого, ставится задача построения такого сфероида для произвольно заданных трёх точек. Пусть это будут точки A, B и C. Исходя из проведённых исследований с эллипсами, очевидно, что и в этом случае задачу можно разбить на два этапа. Первый этап, это на основе полученных для эллипсов решений следует провести произвольный, *базовый* эллипсоид через две заданные точки. Решение предполагает построение по двум точкам, радиус-векторам некоего эллипса, который является сечением этого базового эллипсоида. Такое решение возможно, поскольку ортогональные сечения сфероида являются эллипсами. Далее необходимо повернуть этот базовый эллипсоид вокруг большой оси построенного эллипса до пересечения его поверхности с третьей точкой. Очевидно, что и это решение является единственным, поскольку эллипсоид при вращении своей поверхностью пересекает, "заметает" весь внутренний объём шара.

На рисунке рис.4.5 изображена обобщённая картина вращения точек и построенного на них сфероида. Поверхность шара Римана не показана, она подразумевается. Сфероид, полу-эллипсоид зелёного цвета – это поверхность, построенная на эллипсе, проведённом через повернутые в новую плоскость x'0y' точки A и B. Этот сфероид "ожидает" последней процедуры – вращения вокруг большой оси эллипса до совмещения с точкой C.

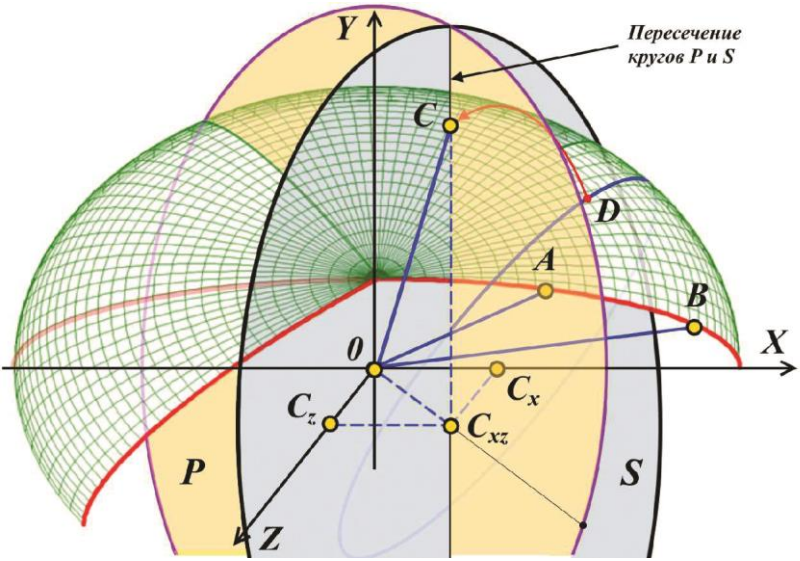


Рис.4.5. Построение сфероида (эллипсоида), проходящего через три заданные точки – A, B и C. Точка D на поверхности эллипсоида (сфероида) – это точка, которая при его вращении совместится с точкой C внутри сферы Римана.

Угол вращения определяется так же, как и в задаче с эллипсами. Для этого проводятся две секущие плоскости – круги P и S. Круг P проводим через ось Y и конечную точку C, а круг S – через точку C ортогонально оси X. Этот круг пересекает построенный эллипсоид в точке D, радиус-вектор которой должен быть равен радиус-вектору точки

C. Мы используем термин *радиус-вектор*, просто чтобы подчеркнуть, что его начальная точка лежит на какой-либо оси, вокруг которой предполагается вращение объектов, связанных с этим вектором. Все линии пересечения однозначны и позволяют определить как декартовы координаты точки C, так и углы радиус-векторов C и D, фактически угол предстоящего вращения эллипсоида.

Действительно, использованные секущие круги однозначно определяют декартовы координаты точки C – C_x, C_y и C_z, а, следовательно, и угол наклона радиус-вектора C0 в плоскости круга S. Точка D лежит на линии эллипса, образованного при сечении базового эллипсоида ортогональной плоскостью. Поскольку известен его радиус-вектора и, фактически, малая полуось этого эллипса, мы можем найти и угол этого радиус-вектора в плоскости круга S. Далее поворачиваем эллипсоид на угол между точками C и D, в результате чего точка D на эллипсоиде, сфероиде совместится с точкой C. Это является решением задачи в повёрнутой системе координат x'y'z': теперь все три точки A, B и C лежат на поверхности одного сфероида.

Новые координаты

Рассмотрим описанные преобразования подробнее, по шагам, используя "проволочные" рисунки вместо объёмных, аксонометрических. Все построения мы производим в новой, повёрнутой системе координат, что позволяет использовать полученные выше результаты с вращением эллипсов. В этой системе оси базового эллипса совпадают с осями координат.

Переход в такую новую, удобную систему координат можно произвести разными способами. Один из них – традиционный, математический. Сначала производим вращение пирамиды ABC0 вокруг некоторой оси таким

образом, что плоскость грани AB0 расположилась горизонтально. Для этого, очевидно, нам нужно найти угол φ_N между исходной плоскостью x0y и плоскостью после поворота. Ясно, что этот угол равен углу между осью z0 и некоторым вектором N_1, ортогональным к плоскости грани AB0. Удобно взять такой вектор также в виде радиус-вектора, начинающегося в общей нулевой точке обеих систем координат. Этот ортогональный вектор $N_1(x, y, z)$ мы можем найти путём векторного произведения двух векторов $A_г$ и $B_г$.

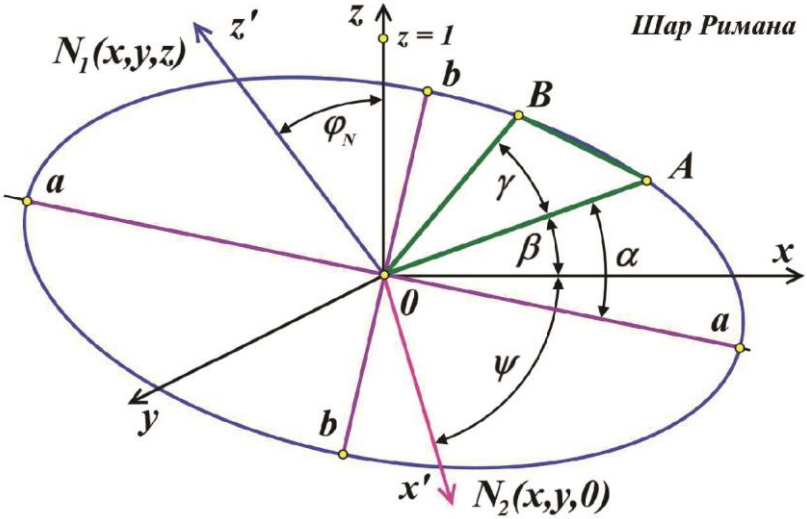


Рис.4.6. Последовательными векторными произведениями построены вектор N_1 и вектор N_2, который лежит в плоскости грани AB0. Вектора N_1 и N_2 естественным образом "назначаются" координатными осями z' и x'

Точные значения и детальные уравнения нас не интересуют, поэтому просто приведём выражение, определяющее этот угол. Вычислив векторное произведение, находим вектор, нормальный к плоскости грани AB0. Угол

между двумя плоскостями – xyz и плоскостью грани равен углу между вычисленным вектором и осью z0.

$$\vec{N}_1(x,y,z) = \vec{A}_r \times \vec{B}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Для собственно поворота грани нам необходимо вычислить ещё одно векторное произведение, найти некий вектор N_2, ортогональный к плоскости векторов N_1 и z0. Понятно, что эта ортогональность вектора N_1 превращает его в одну из координатных осей новой системы координат. Поскольку вектор N_1 мы определённо назначим остью z'0, другой новый вектор N_2, соответственно, может быть назначен осью x'0. Длину вектора для вычисления примем равной единице

$$\vec{N}_2(x,y,z) = \vec{z} \times \vec{N}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ N_{1x} & N_{1y} & N_{1z} \end{vmatrix}$$

Оба вычисления мы производим в исходной системе координат xyz, поэтому все проекции векторов также относятся к ней. Итог вычислений состоит в том, что три вектора N_2, A_r и B_r лежат в одной плоскости. В этой плоскости, образующей новую систему координат x'y'z', координаты векторов A_r и B_r будут иными, причём z-координаты этих векторов будут равны нулю. Заметим, что вектор, линия N_2 – это линия пересечения двух плоскостей – исходной x0y и плоскости грани AB0.

В соответствии с изложенными правилами вращения плоскости, мы определяем, что вектор N_2 ортогонален к оси z0. Следовательно, он лежит в плоскости x0y. Координаты этого вектора нам известны по вычислениям, поэтому также известен и угол между N_2 и осью x0. Обозначим этот

известный нам угол символом ψ. Но кроме этого, этот же вектор N_2 по определению лежит и в плоскости грани AB0. Прямая линия, вектор N_2, перпендикулярный к вектору N_1, который перпендикулярен к плоскости AB0, лежит в этой плоскости. Описанные характеристики векторов N_1 и N_2 явно соответствуют их ролям, как осей новой системы координат: z' и x'.

Однако следует отметить: данный способ перехода в новые координаты нам не подходит. При всей его математической состоятельности, он не позволяет построить базовый эллипс с координатными осями. Требуется дополнительная операция – поворот новых осей координат таким образом, чтобы оси базового эллипса AB0 совпали с этими осями координат.

Автоматические новые координаты

Переход к новым координатам можно произвести иначе. Явочным, принудительным порядком устанавливаем, что треугольник AB0 лежит в координатной плоскости x'0y'. Далее строим на этой плоскости эллипс с центром в начале координат и проходящий через точки A и B. Используем уравнения (2.2), (2.3) и (2.4), переписав их в текущих обозначениях

$$F = a\sqrt{\frac{a^2 - R_A^2}{a^2 - A_x^2}}$$

$$F = a\sqrt{\frac{a^2 - R_B^2}{a^2 - B_x^2}}$$

$$B_x = R_B \cos(\arccos\frac{A_x}{R_A} + \gamma)$$

Решение, как мы выше показали, единственное. При этом *автоматически* образуется собственная координатная

система, плоскость эллипса, наклонённая к исходной координатной плоскости x0y под некоторым, неизвестным нам углом. Все точки – A, B и C в новой повёрнутой системе координат x'y'z' получают новые координаты, причём координаты z точек A и B становятся равными нулю. Длины векторов A0, B0 и C0 при этом остались неизменными. Соответственно, неизменной осталась и исходная пирамида ABC0. Следовательно, координата z точки C в новой, повёрнутой системе координат x'0y' стала равной высоте пирамиды над плоскостью грани AB0. Построенный эллипс AB0 является *базовым* эллипсом, рассмотренным в предыдущих разделах.

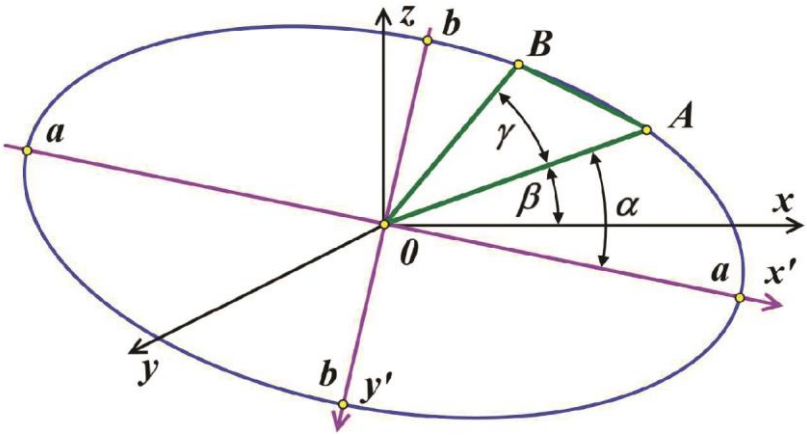


Рис.4.7. Явочным порядком плоскость грани AB0 "уложена" на плоскость x0y новой системы координат. В качестве осей x' и y' в этой системе координат "назначены" полуоси эллипса AB0, проведённого через точки A и B.

Заметим, что в новой системе координат угол между векторами A0 и B0 не изменился, поэтому принимаем без вычислений его прежнее значение – угол γ. Все вычисления в предыдущих разделах мы производили с осью x, в роли которой выступала большая полуось эллипса AB0. Здесь

эта ось просто переименована в x'. Поэтому вычисления новых координат векторов A, B и C мы будет производить относительно этой оси, угол α которой мы вычислили ранее (1.13), исходя из свойств эллипса AB0. Другими словами, осью x'0 мы назначаем не вектор N_2, имеющий на это полное право, а более удобную для вычислений большую полуось эллипса AB0.

Координаты точки C

После перехода к новым *автоматическим* координатам необходимо определить новые координаты точки C. Заметим, что x' и y' координаты точек A и B мы определили в процессе построения эллипса. На следующем рисунке три рассматриваемые произвольные точки в шаре Римана вместе с его центром образуют треугольную пирамиду, в нашем случае пирамиду ABC0.

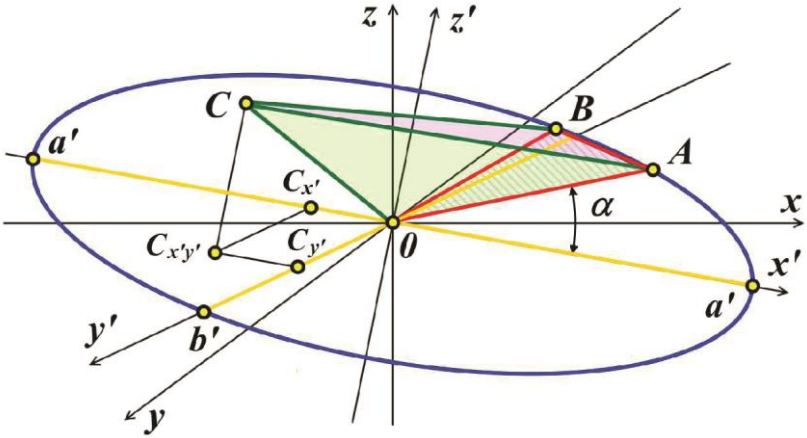


Рис.4.8. Построение эллипса по радиус-векторам A0 и B0 в плоскости грани AB0, образующей систему координат x'y'z'

Для определения угла поворота переменной оси эллипсоида b'0 с целью совмещения его поверхности с точкой C, нам необходимо определить расстояние от начала ко-

ординат ортогональной оси x'0 плоскости, в которой лежит точка C, то есть, величину $C_{x'}$. Именно в этой плоскости, сечении эллипсоида, сфероида находится радиус-вектор Dr = Cr некоторой точки D, которая при вращении совместится с точкой C. Такое совмещение и означает, что точка C будет лежать на поверхности повёрнутого базового сфероида, изначально построенного на полу-эллипсе, описанном вокруг треугольника AB0. Далее эллипс треугольника AB0 для краткости мы будем называть просто эллипсом AB0. Для лучшего восприятия на рисунке этот образующий, базовый эллипс AB0 изображён полностью, хотя в исследованиях мы принимаем во внимание только его половину, верхнюю часть, содержащую точки A и B.

Эллипс является *центральным* сечением искомого *базового* эллипсоида в повёрнутой системе координат. Сечение лежит в плоскости одной из двух главных, равных осей эллипсоида и в плоскости его меньшей, оси переменной длины. Из главных осей можно выбрать любую, в данном случае выбрана ось x', что соответствует ранее использованным обозначениям исследованных эллипсов.

Для определения угла поворота базового эллипса AB0 с его *деформацией* необходимо в первую очередь определить удалённость целевой точки C от плоскости y'0z'. Штрихи в обозначении осей означают их отношение к повернутой системе координат, плоскости треугольника AB0. Направление осей при этом задают оси построенного на треугольнике эллипса AB0. Рассмотрим рисунок рис.4.8 с другой точки, с другого направления – со стороны положительного направления оси z', то есть, будем смотреть сверху на плоскость треугольника AB0, рис.4.9. Последовательно определим величины, уже известные по условиям задачи, и величины, которые можно вычислить с их использованием. Вид A рассмотрен на рисунке рис.4.11.

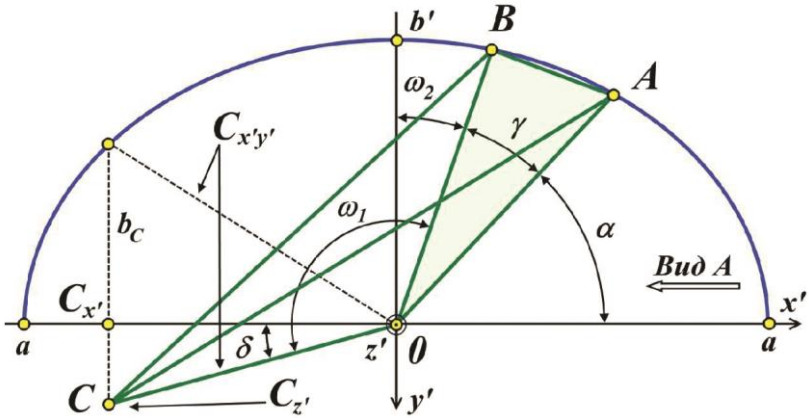


Рис.4.9. Шар Римана. Определение координат целевой точки C, которой при вращении коснётся эллипсоид, построенный на эллипсе AB0

Известные основные величины – это длины рёбер пирамиды ABC0, которые обозначим как R_{AB}, R_{AC}, R_{A0} и так далее, где индексы означают начальную и конечную точку соответствующего ребра. Можно использовать и тождественное, векторное обозначение рёбер, начинающихся в начале координат: $A_г$, $B_г$ и $C_г$, либо R_A, R_B, R_C. Производные, вычислимые параметры системы – это углы между рёбрами, которые можно определить по стандартным соотношениям в соответствующих треугольниках. Еще двумя важными для вычислений величинами являются длина *малой* полуоси эллипса AB0 и зависимый от неё *фокус* эллипса. Интересующее нас удаление $C_{x'}$ точки C от плоскости y'0z', как видно на рисунке рис.4.9, равно

$$C_{x'} = C_{x'y'} \cos\delta$$

где отрезок $C_{x'y'}$ – это проекция ребра R_{C0} на плоскость x'0y'. Длину этого отрезка мы можем определить из выражения

$$C_{x'y'} = \sqrt{R_{C0}^2 - C_{z'}^2}$$

Отрезок $C_{z'}$ – это высота пирамиды над плоскостью её грани AB0. Величина эта определяется стандартными уравнениями для пирамиды, поэтому мы просто обозначим её как известную. Следовательно, и величину $C_{x'y'}$ мы также принимаем как известную, поэтому

$$C_{x'} = \sqrt{R_{C0}^2 - C_{z'}^2}\cos\delta \qquad (4.1)$$

Для определения этой удалённости теперь нам необходим угол δ. Этот угол, согласно рисунку, определяется из соотношения

$$\delta = \omega_1 - \omega_2 - \frac{\pi}{2}$$

Второй из углов справа в уравнении, ω_2 определяем, используя свойства построенного эллипса AB0:

$$\omega_2 = \frac{\pi}{2} - \gamma - \alpha$$

Здесь все углы справа мы считаем известными. Первый угол, ω_1 определяется из соотношения сторон треугольника $B0C_{x'y'}$, которые известны, поскольку известны координаты вершин треугольника в плоскости x'0y'. Действительно, нижнюю сторону треугольника $C_{x'y'}$ мы уже определили. Левая его сторона определяется аналогично

$$BC_{x'y'} = \sqrt{R_{CB}^2 - C_{z'}^2}$$

Второй справа угол в уравнении для ω_2, угол γ определяется из соотношений треугольника AB0, а третий – α, однозначно определяется свойствами построенного эллипса, как выше мы уже показали. Действительно, рассмотрим вновь уравнения (2.2) и (2.3), переписав их под текущие обозначения в виде следующей системы из двух уравнений

$$F = a\sqrt{\frac{a^2 - R_A^2}{a^2 - A_{x'}^2}}$$

$$F = a\sqrt{\frac{a^2 - R_B^2}{a^2 - B_{x'}^2}}$$

Напомним, что все рассматриваемые величины имеют координаты в штриховой системе координат x'y'z'. Преобразуем уравнения

$$F = a\sqrt{\frac{a^2 - R_A^2}{a^2 - A_{x'}^2}} = a\sqrt{\frac{a^2 - R_B^2}{a^2 - B_{x'}^2}}$$

$$\frac{a^2 - R_A^2}{a^2 - A_{x'}^2} = \frac{a^2 - R_B^2}{a^2 - B_{x'}^2}$$

Также перепишем уравнение (2.7) в текущих обозначениях

$$A_{x'} = R_A \cos\left(\arccos\frac{B_{x'}}{R_B} - \gamma\right)$$

Таким образом, мы получили два уравнения с двумя неизвестными – $A_{x'}$ и $B_{x'}$

$$\begin{aligned} &\frac{a^2 - R_A^2}{a^2 - A_{x'}^2} = \frac{a^2 - R_B^2}{a^2 - B_{x'}^2} \\ &A_{x'} = R_A \cos\left(\arccos\frac{B_{x'}}{R_B} - \gamma\right) \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Используя разработанный выше итерационный метод, вычисляем проекции векторов $A_{x'}$ и $B_{x'}$, после чего находим фокус и полуоси a, b = b' эллипса AB0, а также искомый начальный угол α вектора A0. Таким образом, искомый угол δ проекции $0C_{x'y'}$ вектора C0 с осью x'0 и отрезок $C_{x'}$, согласно уравнению (4.1), определяются известными величинами

$$\delta = \omega_1 - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma - \alpha\right) - \frac{\pi}{2} = \omega_1 + \gamma + \alpha - \pi$$

$$C_{x'} = \sqrt{R_{C0}^2 - C_{z'}^2}\cos\delta$$

Ещё одной величиной, необходимой для дальнейших рассуждений, является длина радиус-вектора, соединяющего точку $C_{x'}$ с точкой D на эллипсе AB0, имеющей такую же абсциссу – $C_{x'}$. Именно эта точка D при вращении радиус вектора $C_{x'}D$ вокруг большой оси эллипса, оси x'0 и совместится с целевой точкой C. Длину этого радиус-вектора определяем из канонического уравнения эллипса AB0

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 = \frac{C_{x'}^2}{a^2} + \frac{D_{y'}^2}{b^2}$$

$$\frac{D_{y'}^2}{b^2} = 1 - \frac{C_{x'}^2}{a^2}$$

$$D_{y'} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}C_{x'}^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - C_{x'}^2} \qquad (4.3)$$

Пока мы рассматриваем некие абстрактные промежуточные объекты – точки эллипса. Однако все эти точки имеют самое непосредственное отношение к основному объекту – эллипсоиду, сфероиду, построенному в свою очередь на эллипсе AB0. Вращение эллипсоида на самом деле является несколько условным, поскольку при таком вращении эллипсоид, сфероид всегда проходит через базовый эллипс AB0. То есть, это вращение с *деформацией*. При этом радиус-вектор точки D на эллипсоиде сам не меняется, а лишь меняет *радиальную* точку своего нахождения на эллипсоиде.

Перед продолжением рассуждений сделаем полезное пояснение. На поясняющих рисунках рис.4.9 мы вновь изменяем направление взгляда: теперь мы рассматриваем систему со стороны положительного направления оси x', то

есть, смотрим на плоскость y'0z', как показано стрелкой с надписью Вид А. Вращаемый эллипсоид мы видим теперь в виде набора его сечений, ортогональных оси x'0.

При вращении с деформацией эллипсоид, сфероид своей поверхностью "заметает" всю внутреннюю область шара. Покажем это на отдельном сечении сфероида – некотором эллипсе. Это может быть как центральное сечение сфероида, проходящее через центр сферы, так и любое параллельное ему. На следующих рисунках показаны несколько таких вращаемых эллипсов. На рисунке рис.4.10а эллипсы показаны с шагом в 1 градус, поэтому изменение их малой полуоси не заметно. На рисунке рис.4.10б шаг вращения увеличен до 15 градусов, поэтому теперь уже заметно, что крайние эллипсы имеют малые полуоси разной длины.

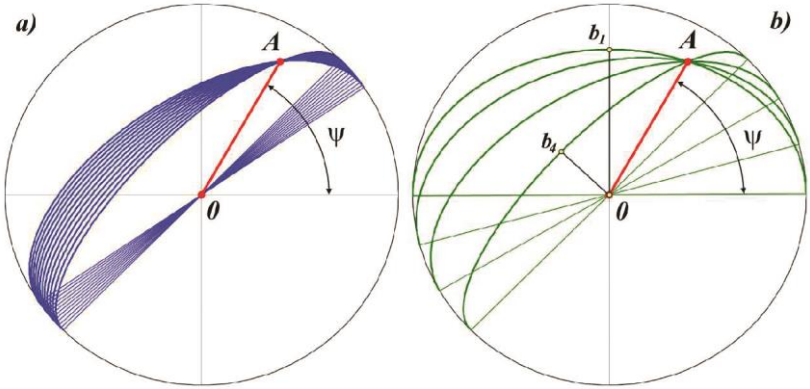


Рис.4.10. Через заданную точку А проведены эллипсы. Слева угловой шаг равен 1 градусу; справа – 15 градусов. При вращении эллипсов меняется их малая полуось.

Изменение длины малой полуоси b вызвано изменением фокусов F при повороте эллипса, что в свою очередь связано с тем, что изменяется наклон базового вектора к большой полуоси, угол ψ, приводящий к изменению его

проекции $A_{x'}$ на эту ось. Отметим, что на рис.4.10 этот угол ψ для каждого из повёрнутых эллипсов – собственный и образован радиус-вектором A0 и большой осью этого эллипса. Изображённый на рисунке угол относится к базовому эллипсу, ось которого совпадает с горизонтальной осью координат.

$$A_{x'} = R_A \cos\psi$$

$$F = a\sqrt{\frac{a^2 - R_A^2}{a^2 - A_{x'}^2}}$$

$$b = \sqrt{a^2 - F^2}$$

Преобразуем совместно эти уравнения

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - R_A^2}{a^2 - A_{x'}^2} a^2} = a\sqrt{1 - \frac{a^2 - R_A^2}{a^2 - A_{x'}^2}} = a\sqrt{1 - \frac{a^2 - R_A^2}{a^2 - R_A^2 \cos^2\psi}}$$

$$b = a\sqrt{\frac{a^2 - R_A^2 \cos^2\psi - a^2 + R_A^2}{a^2 - R_A^2 \cos^2\psi}} = a\sqrt{\frac{-R_A^2 \cos^2\psi + R_A^2}{a^2 - R_A^2 \cos^2\psi}}$$

$$b = a\sqrt{\frac{R_A^2(1 - \cos^2\psi)}{a^2 - R_A^2 \cos^2\psi}} = a\sqrt{\frac{R_A^2 \sin^2\psi}{a^2 - R_A^2 \cos^2\psi}}$$

$$b = \frac{aR_A \sin\psi}{\sqrt{a^2 - R_A^2 \cos^2\psi}}$$

Проверим корректность уравнения по двум крайним, предельным значениям угла. Если ψ = 0, то полуось должна быть равна нулю b = 0. Это выполняется. Если угол ψ = 90 градусов, то полуось должна быть равна радиус-вектору R_A

$$b = \frac{aR_A \sin\psi}{\sqrt{a^2 - R_A^2 \cos^2\psi}} = \frac{aR_A}{\sqrt{a^2}} = \frac{aR_A}{\sqrt{a^2}} = R_A$$

И это условие выполняется. Уравнение можно считать корректным. Большая полуось у всех эллипсов одна и та же, равная радиусу шара Римана. Главное условие – прохож-

дение всех эллипсов при вращении через одну и ту же базовую точку А, вектор которой изображён красным. Нетрудно догадаться, что при полном обороте эллипса его дуга "заметёт" всю поверхность круга. Следовательно, дуга вращающегося с деформацией эллипса обязательно коснётся *любой* точки в круге.

Далее рассмотрим рисунок, вид А на рисунке рис.4.9, демонстрирующий реальный процесс описываемого вращения. Заметим, что плоскость треугольника, эллипса АВ0 на рисунке рис.4.11 выродилась в линию АВ0.

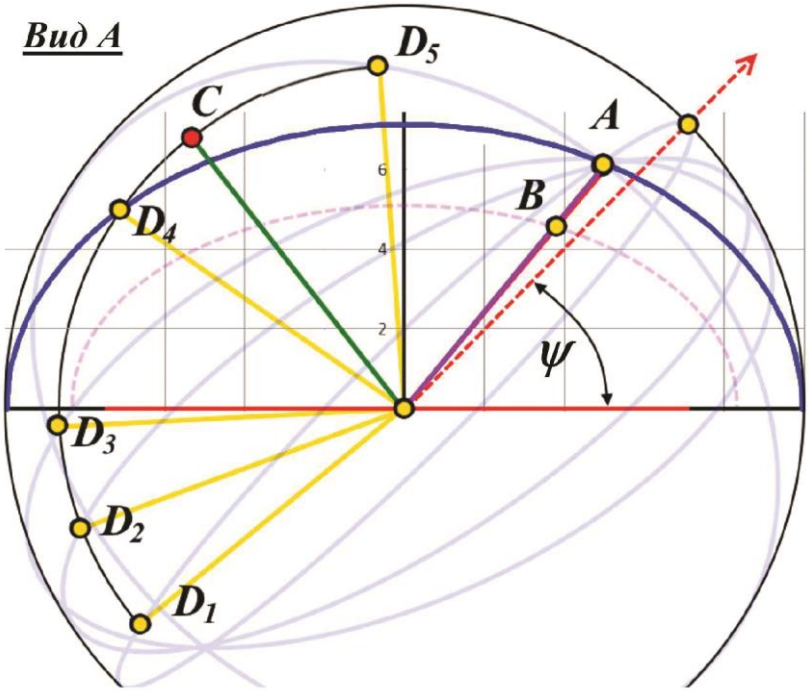


Рис.4.11. Вид А на рис.4.9. При вращении эллипса, проходящего через точку А, его малая полуось изменяется. Радиус-вектор этого эллипса D0 описывает окружность и в некотором положении совпадёт с радиус-вектором С0, поскольку задано D0 = C0.

На этом рисунке мы показываем и главных участников процесс вращения – целевую точку C и "нацеленную" на неё вращаемую точку D эллипсоида. На рисунке без каких-либо особых целей плоскость эллипса AB0 и, соответственно, координатную плоскости x'0y' мы показали под некоторым углом. Ось z' на этом рисунке направлена при этом влево вверх.

Полутоновыми линиями показаны вращаемые эллипсы. Для простоты мы рассматриваем центральное сечение сфероида, поэтому точка A находится непосредственно на линии эллипса-сечения. Также для простоты мы установили, что "совершенно случайно" в этой же плоскости находится и целевая точка C. Следовательно, и точка D также обязана находиться в этой плоскости. Главное обязательное условие совмещения точки D и точки C – это равенство их радиус-векторов $R_{D0} = R_{C0}$, которое задано условиями задачи. При этом эти векторы R_{D0} и R_{C0} не обязаны быть равны радиус-вектору R_{A0} исходной точки эллипса A. Красной штриховой полутоновой линией показано другое сечение эллипсоида, проходящее через точку B. Показаны несколько положений точки D и несущих её вращаемых эллипсов. Понятно, что в процессе вращения эллипсоида, эллипсов точка D описывает в своей плоскости круг. Поскольку радиус-векторы R_{C0} и R_{D0} равны, то в некотором положении точки D и C обязательно совместятся. Поскольку нам известны длины и проекции векторов, мы можем определить и угол между этими двумя векторами. Это тот угол, на который нужно повернуть вектор R_{D0}, чтобы он совместился с вектором R_{C0}.

В данном случае поворот состоит в геометрическом построении соответствующего эллипса, эллипсоида, что является решением поставленной задачи.

Обратное вращение

Понятно, что полученное решение не является окончательным, поскольку все построения и решения выполнены в повёрнутой, производной системе координат x'y'z'. Для получения окончательного решения необходимо произвести обратное вращение, вернуть точки A, B и C и построенный на них сфероид в исходную систему координат xyz. Разумеется, можно остановиться и на этом этапе. То есть, мы переходим *автоматически* в новую систему координат и попросту "забываем" о прежней. В соответствие с обозначениями полюсов на рис.4.4, на наших рисунках ось x' должна иметь обозначения слева: полюс Запад, справа: полюс Восток. Ось y' будет отображать полюса Юг и Север, а ось z', соответственно, полюса Полдень и Полночь.

Для обратного вращения нам необходимо установить связь между системой, полученной при указанном переходе, и исходной системой координат. Очевидно, это обратное вращение, так сказать, глобальный, фундаментальный переход от временных координат x'y'z' к исходным xyz заключается в определении связи между этими двумя координатами, координатными системами. Переход к системе x'y'z' мы произвели в "автоматическом" режиме, до векторных вычислений, до нахождения векторов N_1 и N_2, просто привязав эту систему к эллипсу AB0.

Для определения связи между координатными системами рассмотрим некоторую произвольную точку E и опишем её координаты в исходной системе xyz грани AB0, через её же координаты в повёрнутой системе x'y'z'. Поясним, что эта точка E является обобщённым понятием *любой* точки, возникающей в наших вычислениях в повёрнутой системе координат x'y'z'. Это, в том числе, и любая точка на создаваемых нами эллипсах и эллипсоидах.

Вектор точки E_r при переходе, как и любой другой вектор, не меняет свою длину. Более того, мы имеем право объявить все длины векторов и геометрические параметры треугольников инвариантами при таких переходах. Это значит, что треугольник, эллипс AB0 выглядит одинаково и в системе xyz, и в системе x'y'z'. Именно это обстоятельство, эта инвариантная связь даёт нам возможность установить взаимную зависимость координат точек в каждой из систем. Можно условно, аллегорически сказать, что треугольник AB0 имеет "двойное гражданство". Координаты его вершин можно представить в виде двух эквивалентных таблиц, схожих по виду с матрицами

$$\Delta AB0 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_{x'} & A_{y'} & 0 \\ B_{x'} & B_{y'} & 0 \end{pmatrix}$$

Напомним, что в процессе первого варианта перехода к повёрнутой системе координат при построении векторов N_1 и N_2 мы использовали их координаты в *исходной* системе xyz. Иначе говоря, нам известны x-y-z координаты всех этих векторов – N_1, N_2 и A0. Следовательно, через вычисления нам также известны углы между этими векторами, в том числе и угол ($\psi+\beta$) между N_2 и A0 на рис.4.6. Далее, используя уравнения для построения эллипса (2.2), (2.3) и (2.7), проходящего через две точки, заданные их радиусами A0 и B0 и углом γ между радиусами, мы вычислили угол α наклона вектора A0 к большой оси эллипса. Этим мы определили направление большой оси эллипса в качестве новой оси x', которая, как выше отмечено, заменила в этой роли направление вектора N_2.

Таким образом, нам известны все величины, необходимые для преобразования координат точки E в новых осях – $E_{x'}$, $E_{y'}$ и $E_{z'}$ в координаты исходной системы – E_x, E_y и E_y.

Действительно, по координатам в системе x'y'z' мы находим *инвариантные* длины отрезков EA и EB, формально используя точки A и B как реперные, координатные. Тем самым мы получаем для этой *произвольной* точки E пирамиду – ABE0 с известными длинами рёбер в повёрнутой системе координат.

Но эта же самая пирамида находится и в исходной системе координат как инвариант. Следовательно, по длинам её рёбер мы можем найти все её параметры, в том числе, и координаты точки E(x,y,z). Полные, развёрнутые уравнения таких преобразований мы приводить не будем. Уравнения для определения этих величин не являются уникальными, хотя, видимо, и не тривиальны.

В заключение приведём краткое описание рассмотренного алгоритма построения эллипсоида в *исходной* системе координат. По приведённым в работе базовым уравнениям мы строим "повёрнутый" эллипсоид, сфероид в системе координат x'y'z'. Очевидно, что это построение мы производим по точкам: вычисляем очередную точку эллипсоида, сфероида и наносим её на рисунок. Для построения эллипсоида в *исходной* системе мы сначала пересчитываем x'y'z' координаты этой точки в исходные xyz-координаты, после чего наносим эту точку, теперь уже на рисунок в исходных координатах. Это и есть решение поставленной задачи: построение в исходном шаре Римана эллипсоида, сфероида, проходящего через три произвольно заданные точки.

5. Геометрические тела в сфере Римана

Ранее для построения двухмерных геометрических фигур на диске Римана мы использовали уравнения отрезков геодезических, дуг эллипсов – отрезков наикратчайших *линий*. Подобные же построения, очевидно, осу-

ществимы и в шаре Римана, для чего теперь следует использовать геодезические *поверхности*, поверхности наименьшей площади. На плоской поверхности мы можем привести эти объекты только в виде аксонометрий. Приведём примеры объёмных тел внутри сферы Римана, используя те же механизмы, уравнения, что и на диске Римана. Теперь эти фигуры не являются двухмерными: это, повторим, аксонометрии трёхмерных геометрических тел.

Эллиптический тетраэдр (пирамида)

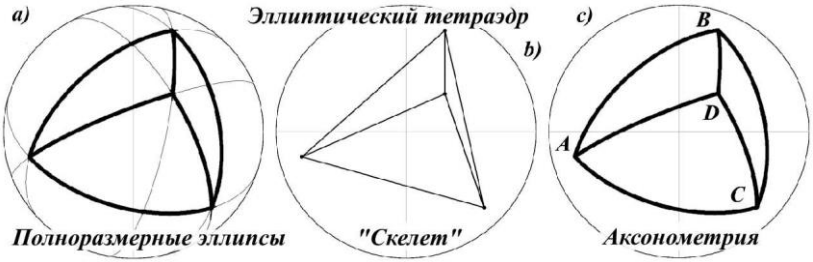


Рис.5.1. Эллиптический тетраэдр

Как и треугольник на плоскости, тетраэдр, пирамиду можно считать наипростейшей фигурой, состоящей из геодезических, условно прямых линий. Тетраэдр на рисунке представлен в трёх видах: состоящим из полноразмерных эллипсов, на которых рёбра просто выделены; скелет – это тот же тетраэдр, рёбра которого приведены в евклидовом трёхмерном пространстве погружения; наконец, на третьем рисунке тетраэдр представлен в виде аксонометрии без всяких вспомогательных линий.

Эллиптический куб

На следующем рисунке представлена аксонометрия куба в двух вариантах. Сначала для наглядности строим в границах диска Римана аксонометрию в обычном декар-

товом виде. Затем эти же точки соединяем геодезическими, отрезками эллипсов.

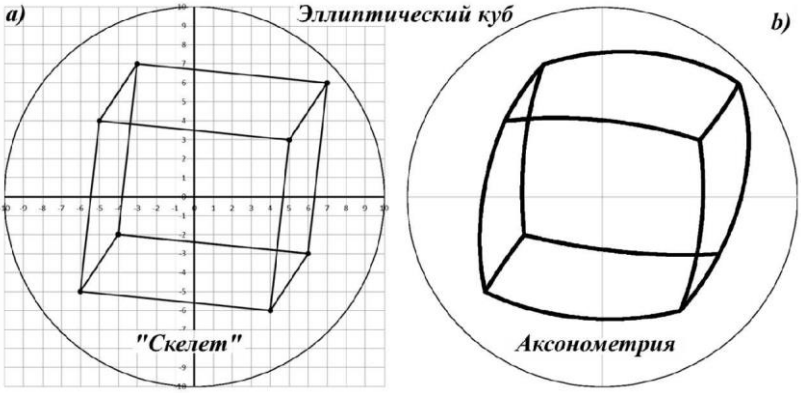


Рис.5.2. Эллиптический куб

Эллиптический гиперкуб

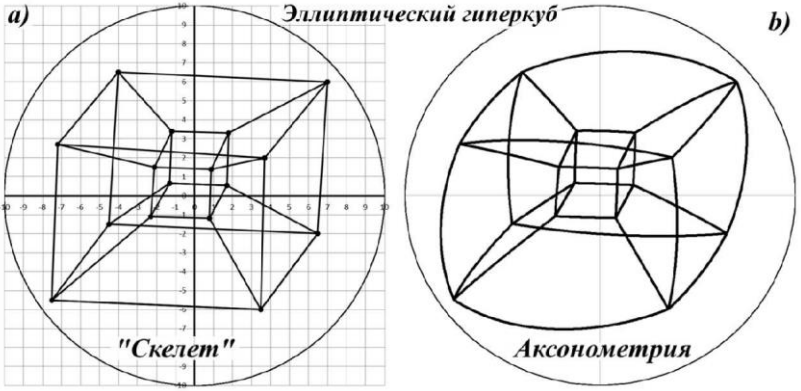


Рис.5.3. Эллиптический гиперкуб

Традиционное изображение гиперкуба, тессеракта. Мы привели два варианта: декартову аксонометрию "скелета" и эллиптическую аксонометрию на диске Римана. Точно так же эллиптическая аксонометрия гиперкуба будет выглядеть и в шаре Римана. Фигуры мы умышленно изобразили с небольшим наклоном, чтобы по возможности

избежать радиальных отрезков эллипсов, которые будут представлены не дугами, а строго прямыми линиями.

Заключение

Диск (круг) Римана – это *симуляция* двухмерного эллиптического пространства положительной кривизны. Обозначение его как симуляции означает, что это двухмерное пространство лишь отчасти отражает все свойства оригинала, поскольку оно не позволяет увидеть, что собой реально представляет этот оригинал. Диск Римана можно назвать проекцией на плоскость эллиптического двухмерного пространства, в рассматриваемом случае – сферической поверхности. Вероятно, возможны ещё две проекции эллиптического пространства – проекция сфероида вращения вдоль оси вращения и проекция произвольного эллипсоида. В последнем случае диск Римана примет форму плоского эллипса. Считать диск Римана конформным отображением соответствующего пространства нельзя, поскольку в проекции последнего углы не сохраняются. Это хорошо видно, например, на рис.3.2.

Сфера (шар) Римана – это симуляция трёхмерного эллиптического пространства положительной кривизны. Такое пространство требует введения особой категории геодезических. Здесь это не геодезическая *линия*, а геодезическая *поверхность*. Обозначение сферы как симуляции также означает её неполное соответствие оригиналу, суть которого также неясна. Сфера, шар Римана позволяет наглядно показать некоторые соотношения в реальном эллиптическом трёхмерном пространстве, но и она не является в полной мере конформным отображением.

Эллиптические симуляции позволяют выдвинуть следующие предположения, справедливость которых, строго говоря, нуждается в доказательстве:

Через вершины треугольника можно провести любое число эллипсоидов. Через вершины треугольника можно провести любое число *двухосных* эллипсоидов – сфероидов, то есть, эллипсоидов две оси которого равны и в данном контексте – предопределены. Если третья ось имеет некоторое *заданное* значение, то соответствующий ей полу-сфероид – единственный.

Если вершина треугольника совпадает с центром эллипса, то через две его другие вершины можно провести только два эллипса (симметричные эллипсы считаем одним). Если эти вершины лежат по одну сторону от большой оси эллипса, то такой эллипс – единственный.

Разработан алгоритм и уравнения для построения на диске Римана геометрических фигур, состоящих из геодезических. Рассмотрен аналогичный алгоритм, но без законченного набора уравнений, для построения в шаре Римана геометрических тел, ограниченных геодезическими поверхностями.

Сфера Лобачевского

Трёхмерное пространство отрицательной кривизны.

Диск Пуанкаре

В одной из прошлых работ [75] мы рассмотрели вопрос построения геодезических на поверхности отрицательной кривизны, гиперболической поверхности Лобачевского. Поверхность была представлена симуляцией на диске Пуанкаре. Целью этого исследования было разработать методику построения геодезических по двум заданным на диске точкам. Методика была разработана, и строго математически доказана её корректность.

Использование методики позволило создать иллюстрацию эквиуглового перемещения вектора по замкнутому контуру на поверхности Лобачевского, на поверхности отрицательной кривизны. Как и для сферической поверхности было показано, что при таком перемещении вектор возвращается в исходную точку с поворотом, то есть, его направление не совпадает с исходным вектором. Эквиугловое перемещение означает такое перемещение, при котором угол между вектором и геодезической траекторией переноса остаётся неизменным. Отмечено также, что *параллельное* перемещение векторов в искривлённом пространстве не имеет смысла.

Перемещение на двухмерной поверхности отрицательной кривизны, на диске Пуанкаре является частным случаем. Математический механизм, заложенный в дисковую симуляцию двухмерной поверхности Лобачевского, допускает расширение модели на трёхмерное пространство отрицательной кривизны L^3. Наряду с двухмерным диском Пуанкаре возможна трёхмерная модель, которую мы назвали сферой Лобачевского. Правильнее, конечно, называть её не сферой, а шаром, но "шар Лобачевского", на

наш взгляд, название менее благозвучное. Нам неизвестны упоминания в литературе описываемой модели, поэтому мы и решили сами присвоить ей название. Как и двухмерный диск Пуанкаре, сфера Лобачевского является такой же *симуляцией*, но трёхмерной, также не имеющей реального воплощения [75].

Пространство Лобачевского может быть представлено в виде *разнообразных* геометрических тел: псевдосфера Бельтрами, катеноид, поверхность Куена и другие [53]. Основой всех этих тел, их *поверхностей* являются некие абстрактные поверхности *постоянной* отрицательной кривизны:

"Геометрия плоскости Лобачевского реализуется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны в следующем смысле. Односвязный кусок такой поверхности всегда можно взаимно однозначно отобразить на кусок плоскости Лобачевского с сохранением длин всех кривых, углов между ними, площадей всех фигур и т.д. Геодезические линии поверхности отображаются при этом в прямые плоскости Лобачевского" [54, с.407].

Звучит это несколько странно, поскольку поверхность, пространство Лобачевского такой поверхностью является по определению. Реальной, *физической* поверхности Лобачевского *постоянной* отрицательной кривизны не существует. Не существует *полной* и регулярной поверхности, внутренняя геометрия которой представляла бы геометрию *полного пространства* Лобачевского, поверхности *постоянной* отрицательной кривизны:

"... не удаётся с помощью ни одной из известных до сих пор поверхностей постоянной отрицательной кривизны осуществить целиком всю плоскость Лобачевского" [26, с.304].

"... не существует аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей нигде особенностей и повсюду регулярной ... на ... вопрос о том, можно ли ... осуществить в евклидовом пространстве на некоторой регулярной аналитической поверхности всю плоскость Лобачевского, надо ответить отрицательно" [26, с.311].

Поскольку диск Пуанкаре имеет неравномерно сжатый, деформированный радиальный масштаб, на нём геодезические имеют вид окружностей лишь условно. Геодезические в виде окружностей – кажущаяся форма. Это хорошо заметно, если рассмотреть шкалу расстояний на диске. От центра к периферии радиальные отрезки сокращаются вплоть до нуля. Если вернуть шкалу расстояний в обычный, равномерный ряд, то все окружности окажутся непропорционально вытянутыми, примут форму гипербол [73 Иллюзия кривизны].

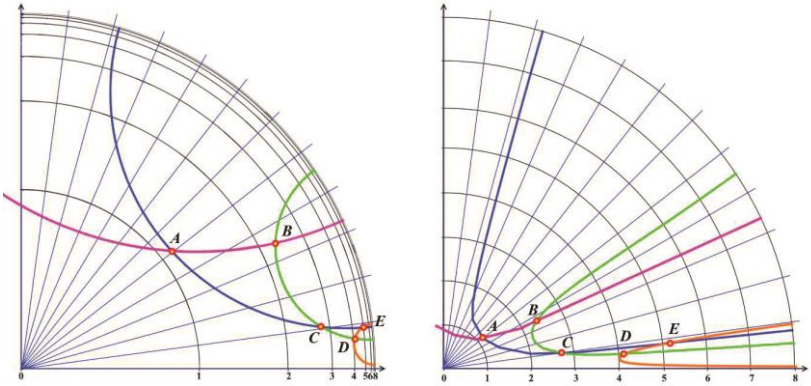


Рис.1. Построение геодезических треугольников из ортогональных окружностей на диске Пуанкаре (слева) и из производных для них гипербол в плоском пространстве (справа)

На рисунке рис.1 представлены два геодезических треугольника, то есть, треугольники, ограниченные геодезическими, ортогональными окружностями на диске Пуанкаре, на котором они считаются прямыми линиями на поверхности отрицательной кривизны.

Слева приведено традиционное изображение таких треугольников ABC и CDE. Диск Пуанкаре является бесконечной плоскостью, сжатой в диск конечных размеров, вследствие чего его шкала расстояний и стала неравномерной. Справа этот диск возвращён в состояние с равномерной, обычной шкалой, но теперь уже отражающий лишь небольшой участок бесконечной плоскости. Поскольку на обоих дисках использована полярная система координат, углы радиус-векторов изображены одинаковыми. По соответствующим, одинаковым радиус-векторам и по шкалам, по точкам, вручную справа геодезические изображены такими, какими они видны в реальности. Очевидно, линии имеют форму гипербол. Поверхность отрицательной кривизны, следовательно, можно называть гиперболической поверхностью, двухмерным пространством. Отметим, что такое сжатие равномерной шкалы до размеров сферы не является конформным. На рисунке видно, что углы различаются. Особенно это заметно на углах CDE: слева он почти прямой, а справа заметно приближается к двум прямым.

Сфера Лобачевского

Рассматривая сферу Лобачевского, мы, как и в случае с диском Пуанкаре, ставим очевидную задачу проведения геодезической *линии* через две произвольные точки в трёхмерном пространстве Лобачевского. На следующем рисунке это точки B и P. Учитывая, что пространство трёхмерное, мы вводим понятие геодезической *поверхности* Лобачевского. Это означает, что в таком пространстве

мы можем построить не только *условно плоский* криволинейный треугольник или любую фигуру с другим числом вершин. Теперь мы можем построить в ней тело с не менее чем четырьмя вершинами, например, гиперболический тетраэдр, ограниченный четырьмя *геодезическими* треугольниками. Такое тело – единственное, поскольку через любые три точки L^3 пространства мы можем провести только одну *геодезическую* поверхность – сферу. Правда, в этом случае возникает неявное ограничение. Формально для ортогональной сферы ещё одна точка уже как бы задана – точка ортогональности сфер. Поэтому третья вершина треугольника – это четвёртая точка, и она также должна лежать на уже сформированной ортогональной сфере. Геодезические *поверхности* имеют определяющее свойство: это сферы, которые пересекают сферу Лобачевского ортогонально, что совпадает со свойствами геодезических на диске Пуанкаре. Легко показать, что сфера, ортогональная к данной сфере, ортогональна в любой точке пересечения этих сфер. Достаточно рассмотреть систему таких двух сфер относительно оси, проходящей через их центры. Вследствие симметрии, все точки линии пересечения равноценны. Если в одной из них сферы ортогональны друг другу, то автоматически они ортогональны во всех других.

Также отметим, что любая плоскость, проходящая через центры сфер, вырезает, создаёт обычную систему с диском Пуанкаре и ортогональными окружностями – геодезическими *линиями*. Напомним, что и у диска Пуанкаре и у сферы Лобачевского радиус нелинейный. По мере удаления от центра, единичные отрезки на радиусах уменьшаются, вследствие чего эквивалентная длина радиуса стремится к бесконечности. Мы используем степенной закон деформации: интервалы вдоль радиуса сокращаются

по обратным степеням двойки. Принципиально это не отличается от тангенциальной деформации осей на диаграммах Пенроуза.

Вследствие симметрии, ортогональных сфер *любого радиуса* к заданной точке внутри сферы Лобачевского может быть бесконечное множество. Точнее, на порядок больше, чем ортогональных окружностей на диске Пуанкаре, условно говоря, в ∞^2 раз больше. Линия центров диска Пуанкаре при этом превращается в плоскость центров ортогональных сфер.

Для построения искомой геодезической проведём секущую плоскость через центр A сферы Лобачевского и две выбранные точки B и P. В пространстве погружения Евклида E^3 через три точки можно провести только одну плоскость. Следовательно, используя математику инверсных точек, мы можем построить только одну, *единственную* геодезическую окружность, с которой, соответственно, будет связана *единственная* ортогональная сфера с центром в этой плоскости.

Методика построения ортогональной окружности, геодезической полностью совпадает с описанной в статье [75]. Приведём частично описание и рисунок из этой работы, адаптируя их к сфере. Для наглядности на сфере мы используем те же самые обозначения, что и в указанной работе. Цветной оригинал рисунка рис.2 приведён здесь на странице стр.314. Проведём на секущей плоскости линию через центр сферы, то есть, через центр образовавшейся окружности, и первую точку B искомой геодезической. Восстановим в точке B перпендикуляр до пересечения с окружностью в точке D и затем проведём к окружности в этой точке касательную до пересечения с линией AB. Точку пересечения обозначим буквой C. Легко показать, что образовавшиеся треугольники отвечают соотношению

$AB \times AC = R^2$ для точек B и C, получивших название инверсных. Перпендикуляр к середине этого отрезка BC является линией центров ортогональных *окружностей* к образовавшейся окружности, эквиваленту диска Пуанкаре с центром в A и радиусом R сферы Лобачевского.

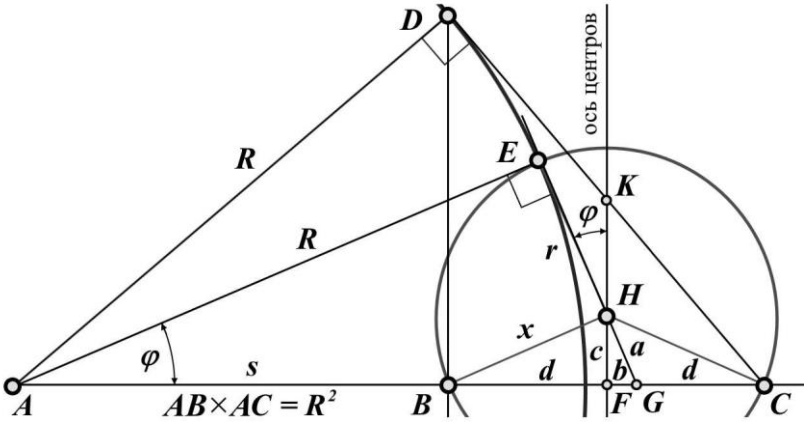


Рис.2. Рисунок из статьи [75, рис.5]. Построение окружности, ортогональной к границе диска Пуанкаре. Цветной оригинал рисунка – на стр.314

Иначе говоря, центр любой ортогональной окружности, построенной по описанной методике и проходящей через точки B и C, естественно, находится на перпендикуляре к центру этого отрезка. Доказательство этого впервые было приведено в статье [75] и повторено здесь.

Поскольку окружность может быть любого радиуса, то легко найти такую, которая будет проходить и через вторую заданную точку P. Для нахождения её центра нужно провести перпендикуляр через середину отрезка BP до пересечения с линией центров. Ясно, что методика позволяет построить только одну, *единственную* такую окружность. Для заданных двух точек мы провели единственно возможную секущую плоскость. На этой плоскости мы построили единственно возможный центр ортого-

нальной окружности. Построив вокруг этой окружности сферу, мы получим единственно возможную сферу с центром в этой плоскости, ортогональную к выбранной сфере Лобачевского.

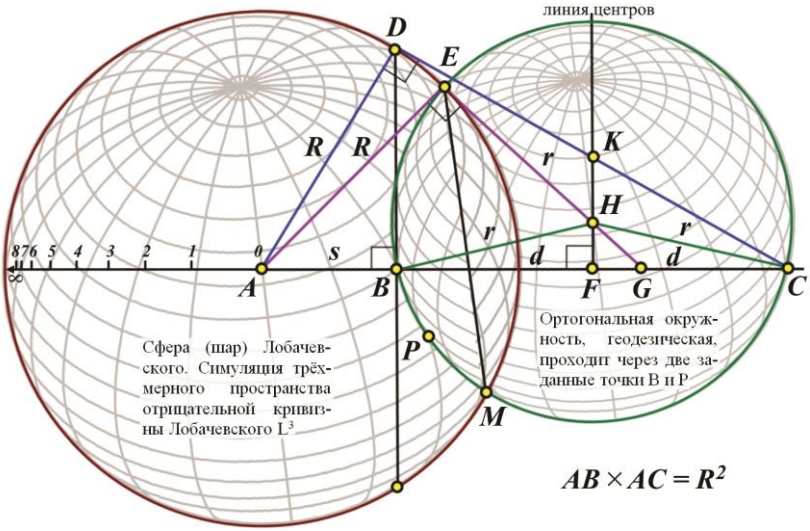


Рис.3. Сфера (шар) Лобачевского. Левая сфера – симуляция трёхмерного пространства отрицательной кривизны Лобачевского L^3. Правая сфера – ортогональная окружность, геодезическая, проходит через две заданные точки B и P

Для дальнейших выкладок мы воспользуемся описанием одной замечательной точки треугольника – точки пересечения перпендикуляров к центрам его сторон:

"Серединный перпендикуляр ... – прямая, перпендикулярная данному отрезку и проходящая через его середину. ... Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ... пересекаются в одной точке – центре описанной окружности" [58].

Присвоим этой точке пересечения серединных перпендикуляров собственное имя – срединная точка. В дополнение к описанию этой замечательной точки тре-

угольников в планиметрии добавим её расширенный вариант в стереометрии:

Перпендикуляр, восстановленный к срединной точке треугольника, является осью фигур вращения, проходящих через вершины треугольника. В частности, на этой оси расположены центры бесконечного количества сфер, диаметром, не менее диаметра описанной окружности.

Для рассматриваемого нами трёхмерного пространства отрицательной кривизны, сферы Лобачевского сформулируем также и своеобразный аналог 5-го постулата Евклида как дополнение к его вариантам для двухмерных пространств положительной и отрицательной кривизны:

Через точку, лежащую вне заданной геодезической поверхности можно провести бесконечное число "параллельных" геодезических поверхностей, то есть, поверхностей, не пересекающих заданную.

Слово "параллельных" мы взяли в кавычки, поскольку понятия параллельных *криволинейных* поверхностей не определено, как не определено корректно и понятие параллельных линий в искривлённых пространствах [74]. В отличие от диска Пуанкаре, в сфере Лобачевского понятие равнобежных (асимптотически параллельных) *поверхностей* в данном случае имеет весьма условный смысл ввиду их бесконечного числа. В варианте, когда внешняя точка расположена над *центром* заданной геодезической *поверхности*, сохраняется понятие *особой* ультрапараллельности – это единственная геодезическая *поверхность*, симметрично расположенная по отношению к заданной поверхности: точка и центры сферы и двух геодезических находятся на одной линии.

Следующий рисунок поясняет формирование алгоритма построения геодезической *поверхности*, заданной тремя точками внутри сферы Лобачевского. Главное условие – геодезическая поверхность, сфера должна быть ортогональна к сфере Лобачевского. Как известно, через произвольные три точки можно провести любое число сфер, сфер разного диаметра. Это прямо следует из свойств замечательной точки треугольника – точки пересечения перпендикуляров к центрам его сторон.

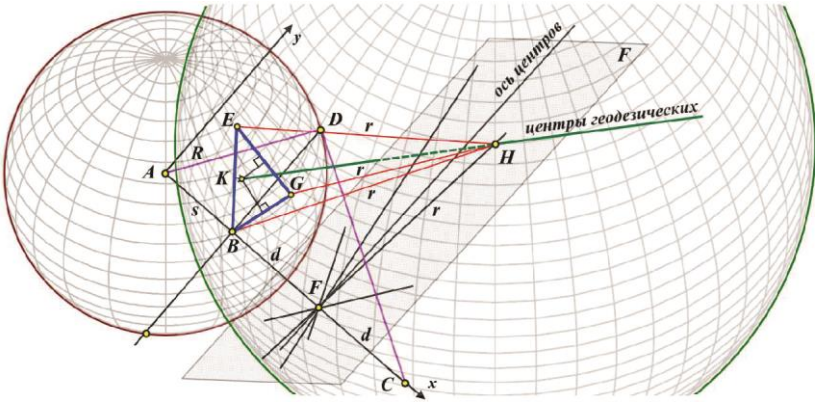


Рис.4. Левая сфера – сфера (шар) Лобачевского, симуляция трёхмерного пространства отрицательной кривизны Лобачевского L^3. Правая сфера – геодезическая поверхность в сфере Лобачевского. Проходит через углы треугольника BEG внутри сферы и инверсные точки B и C, которые отвечают уравнению $AB \times AC = R^2$. Точка K – пересечение медиатрис, серединных перпендикуляров к сторонам треугольника BEG. На перпендикуляре KH находятся центры всех геодезических сфер, проходящих через вершины треугольника. Плоскость (серая) – образуется вращением оси центров ортогональных окружностей вокруг оси BC.

Эта срединная точка является центром описанной вокруг треугольника *окружности*. Но, очевидно, что любая

окружность может быть окружностью, сечением сферы *любого* диаметра, не меньшего диаметра окружности. Следовательно, и стороны заданного треугольника BEG также могут быть хордами *любой* такой сферы.

Рассмотрим треугольник BEG и его срединную точку K. Восстановим в ней перпендикуляр бесконечной длины. Выберем на перпендикуляре произвольную точку H и соединим её с вершинами треугольника. Рассмотрим далее прямоугольную пирамиду с вершиной H и основанием EKG. Две её грани равны: EKH и GKH, поскольку обе они – прямоугольные треугольники, имеющие по две равные стороны: EK = GK, как радиусы описанной окружности, и общая – KH. Из этого следует, что и третьи их стороны равны: EH = GH. Рассмотрев аналогично две другие грани, приходим к выводу, что все рёбра пирамиды равны: EH = GH = BH. Поскольку мы имеем три точки B, E и G, одинаково удалённые от третьей точки H, мы можем провести через них сферу радиусом, равным длине этих рёбер.

Поскольку точку H мы выбрали произвольно, значит через эти три точки B, E и G мы можем провести сферу любого радиуса. Все центры сфер при этом лежат на перпендикуляре к срединной точке треугольника. Поэтому мы дадим ему с некоторым опережением название – линия центров геодезических. С опережением, поскольку мы пока не уверены, что эта сфера будет ортогональна к нашей сфере Лобачевского.

Для дальнейших рассуждений повторим сделанные ранее построения, подобные построениям на диске Пуанкаре. Проведём из центра A сферы Лобачевского через одну из вершин выбранного треугольника B произвольную плоскость, и через неё же – линию. В плоскости проведём перпендикуляр к точке B до пересечения со сферой в точке D. Проведём к этой точке радиус DA и касательную к

сфере, ортогональную к этому радиусу. Точку пересечения касательной и линии, проходящей через точки AB, обозначим буквой C. Как известно, эти две точки – B и C называются инверсными и отвечают соотношению $AB \times AC = R^2$. Проведём через середину F отрезка BC в созданной плоскости перпендикуляр. По построению плоскость является полным аналогом диска Пуанкаре, поэтому прямая из F является линией центров окружностей, ортогональных к границе полученного диска Пуанкаре, то есть, геодезических на диске.

Приведём во вращение плоскость и диск вокруг линии AC. Очевидно, точка D опишет на сфере Лобачевского окружность, а радиус DA и касательная DC очертят два конуса. Соответственно, перпендикуляр в точке F – очертит бесконечную плоскость, ортогональную к линии AC, которую обозначим для краткости и определённости как плоскость F.

Рассмотрим сущность этой плоскости. Каждая линия на ней, проходящая через точку F для каждого положения вращаемой плоскости, всегда, обязательно входит в какую-то группу с треугольником ADC, которая в каждом из этих случаев описывается соотношением $AB \times AC = R^2$, то есть, линия через F является линией центров ортогональных окружностей, проходящих через точки B и C.

Поскольку линия центров геодезических из точки K не параллельна плоскости F, она её пересечёт в некоторой неизвестной точке H. В случае параллельности линии из K и плоскости F примем, что неизвестная точка H находится в бесконечности.

Поскольку эта точка H находится на линии центров сфер из точки F, проходящих через вершины треугольника BEG, и одновременно на плоскости F, являющейся плоскостью центров геодезических сфер, эта точка H автома-

тически становится центром сферы, проходящей через заданные точки, вершины треугольника BEG и инверсную точку C. Таким образом, эта сфера автоматически оказывается ортогональной к абсолюту, границе сферы Лобачевского. Что нам и требовалось найти.

Однако пока нам неясно, как определить *точное* положение этой точки H. Очевидны два варианта построений: геометрические и аналитические. Во втором случае нам необходимо все параметры системы представить в аналитическом, числовом виде. Координаты центра сферы Лобачевского, очевидно, мы зададим нулевыми. Координаты вершин треугольника – обычными координатами либо в полярной системе координат, либо в некой условной декартовой; условной ввиду неравномерности интервалов. На рис.3 и рис.5 мы изобразили эту неравномерность на отдельном радиусе сферы.

В общих чертах смысл метода определён, но для дальнейших *однозначных* построений нам необходимо ввести третью координатную ось z или второй, дополнительный полярный угол.

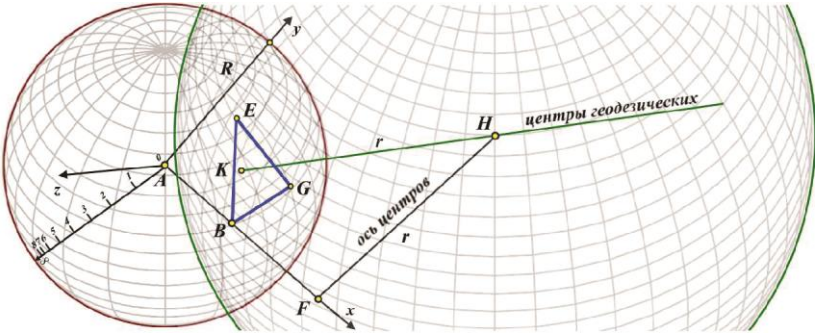


Рис.5. Усечённая версия рис.4. Слева – сфера Лобачевского, симуляция трёхмерного пространства отрицательной кривизны. Сфера справа – геодезическая поверхность в сфере Лобачевского.

Рисунок рис.5 является копией предыдущего рис.4 с добавленной третьей декартовой координатой. С рисунка мы удалили теперь уже лишние линии, затеняющие его. Рисунок представляет сферу (шар) Лобачевского, являющуюся симуляцией трехмерного пространства отрицательной кривизны Лобачевского L^3. Сфера справа – геодезическая поверхность в сфере Лобачевского. Проходит через углы треугольника BEG внутри сферы и инверсные точки B и C, которые отвечают уравнению AB x AC = R^2. Точка K – пересечение медиатрис, серединных перпендикуляров к сторонам треугольника BEG. На перпендикуляре KH находятся центры всех геодезических сфер, проходящих через вершины треугольника.

Для окончательных геометрических построений с целью геометрического определения *точного* положения точки H нам необходимы все три проекции объектов на рисунке. Для удобства, необходимо объекты на рисунке сначала развернуть таким образом, чтобы плоскость xAy совпала с плоскостью рисунка. Затем добавить проекции плоскостей zAy и zAx, на которых следует показать положения вершин треугольника BEG. В результате построений точка H получит единственно возможное положение.

Для соответствующих аналитических построений нам необходимы пространственные, численные координаты всех точек: в декартовой или сферической системах координат. Координаты точки H мы получим также в численном виде.

Заметим, что оба варианта достаточно трудоёмки и, вместе с тем, уже не дадут какой-либо новой *принципиально* необходимой информации. Приведённого доказательства *единственности* точки H нам уже достаточно, поэтому дальнейшие построения и вычисления мы прекращаем.

Трёхмерные тела отрицательной кривизны

Наличие у пространства трёх координат прямо предполагает возможность создания в нём объектов, имеющих какой-то объём. Основным, главным классом таких объектов, тел следует признать объекты, образованные *геодезическими* поверхностями, причём объекты должны быть замкнутыми. Геодезическая *поверхность* в соответствующем искривлённом пространстве – это эквивалент плоскости Евклида. В рассмотренном пространстве отрицательной кривизны Лобачевского, в сфере Лобачевского такими поверхностями являются ортогональные сферы. Тело, образованное не более чем тремя геодезическими поверхностями в сфере Лобачевского, будет незамкнутым, с одной стороны оно будет открыто до бесконечности. В геометрии Евклида сказано:

"... две прямые не содержат пространства" [30, с.15].

В стереометрии и в рассматриваемом трёхмерном пространстве Лобачевского справедливо подобное утверждение: три плоскости или три геодезические двухмерные поверхности пространства не содержат. В сфере Лобачевского замкнутый объект, как и в пространстве Евклида, могут образовать, как минимум, четыре геодезических поверхности.

Замкнутость означает невозможность попасть внутрь объекта извне, не пересекая его границы. Иначе говоря, такие тела имеют двухстороннюю границу. Как и в пространстве Евклида, объектом с наименьшим числом граней в сфере Лобачевского является *четырёхгранник*, в частности, тетраэдр. Для его построения необходимо построить четыре геодезические поверхности, проходящие через четыре точки, не лежащие в одной геодезической плоскости, поверхности. Далее для простоты изображение тетраэдра в трёхмерном пространстве отрицательной кривизны мы

приведём схематично – рисунок рис.6. Верхняя вершина тетраэдра D находится к абсолюту сферы Лобачевского ближе остальных. Все грани, кроме нижней, вогнуты. Нижняя грань ABC – выпуклая, она образована самой большой геодезической поверхностью, и весь тетраэдр находится внутри неё. Для построения тетраэдра мы не стали производить достаточно сложные стереометрические построения, нагружать иллюстрацию многочисленными "строительными лесами".

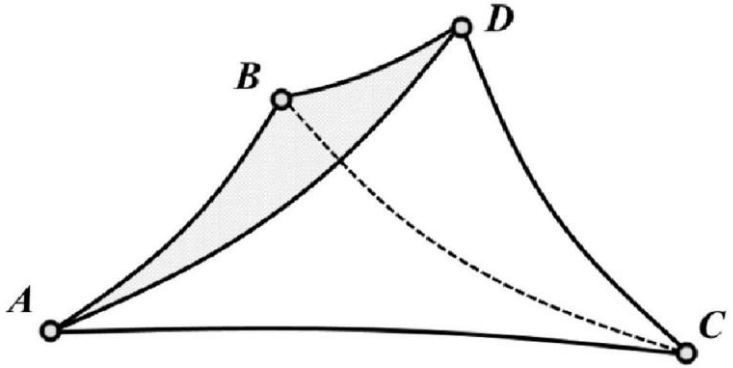


Рис.6. Тетраэдр Лобачевского. Грани тетраэдра – это геодезические *поверхности* в трёхмерном пространстве отрицательной кривизны L^3

Следующим по сложности объектом, очевидно, должен быть пятигранник. Однако это достаточно редкий объект, поэтому сразу переходим к самому распространённому – кубу. Механизм его построения тот же – необходимо через восемь точек провести шесть геодезических поверхностей, ортогональных сфер, граней куба. Выбор точек проще сделать аналитически – задать их координаты таким образом, чтобы каждая точка находилась на одном и том же расстоянии от трёх ближайших. Как и в случае тетраэдра, здесь мы также не делаем сложных стереометрических построений, а приводим схематичную иллю-

страцию – рисунок рис.7. Она довольно далека от точных построений, но достаточно точно отображает вид объекта – куба в трёхмерном пространстве отрицательной кривизны.

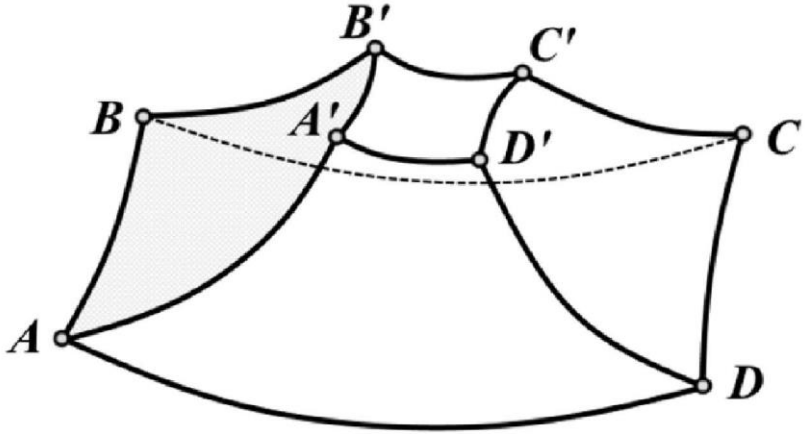


Рис.7. Куб Лобачевского. Грани куба – это геодезические *поверхности* в трёхмерном пространстве отрицательной кривизны L^3. Нижняя грань куба – выпуклая и расположена ближе к центру сферы Лобачевского.

На рисунке верхняя, меньшая грань куба A'B'C'D' находится ближе к абсолюту, границе сферы Лобачевского. Все грани, кроме нижней, вогнуты. Нижняя грань ABCD образована самой большой геодезической поверхностью и весь куб находится внутри неё.

Следующим широко распространённым объектом, имеющим объём, является сфера. Понятно, что ни в пространстве Евклида, ни, видимо, в любом другом трёхмерном пространстве сфера не может быть образована "внутренними плоскостями", геодезическими поверхностями. Главная причина в том, что сфера и другие объекты, ограниченные криволинейными поверхностями, внутренними для пространства, по сути, являются объектами, погру-

жёнными в это пространство. Иначе говоря, чужеродными объектами. Проявляется это, в частности, в том, что на этих чужеродных объектах присутствуют принципиально иные геодезические.

Например, в рассмотренную нами сферу Лобачевского, трёхмерное пространство, мы можем без деформаций поместить обычную евклидову сферу. Из пространства погружения мы и будем видеть её именно как идеально симметричный объект, сферу, на которой есть собственные геодезические – большие круги. У этой сферы – собственный параллельный перенос вектора по замкнутой траектории с *опережающим* поворотом при возврате. Наконец, у неё есть собственный треугольник с суммой углов, превышающих два прямых. Однако, с точки зрения наблюдателя в сфере Лобачевского, сфера эта будет выглядеть как довольно экзотический объект. Рассмотрим теперь другой процесс – *эквивалентный* перенос в сферу Лобачевского обычной сферы из пространства погружения – рисунок рис.8. Для этого рассмотрим первый квадрант сечений сферы Лобачевского, слева, и её же, но без радиальной деформации, справа. Для простоты построения шкалы, длин радиус-векторов, мы используем её деление по степеням двойки: длина первого отрезка равна 2^{-0}, второго – 2^{-1}, третьего – 2^{-2} и так далее. При таком делении, уже отметка 8 в сфере Лобачевского практически сливается с границей сферы, с абсолютом. Поэтому будем использовать только 8 точек на радиус-векторах.

Окончательные сферы получим вращением этих сечений вокруг горизонтальной оси. Полярные углы в обоих сечениях тождественны, мы рассматриваем только 13 положений – от 0 до 12. В каждом из этих положений определяем длину радиус вектора в плоском, недеформированном пространстве. Затем откладываем это расстояние в

сечении сферы Лобачевского, учитывая, разумеется, её шкалу расстояний. После нанесения всех 13 точек, соединяем их плавной кривой и производим вращение вокруг горизонтальной оси. Как и выше, здесь мы также не проводим замысловатых стереометрических построений полученной сферы, а сразу же приводим её схематичное изображение – средняя часть рисунка.

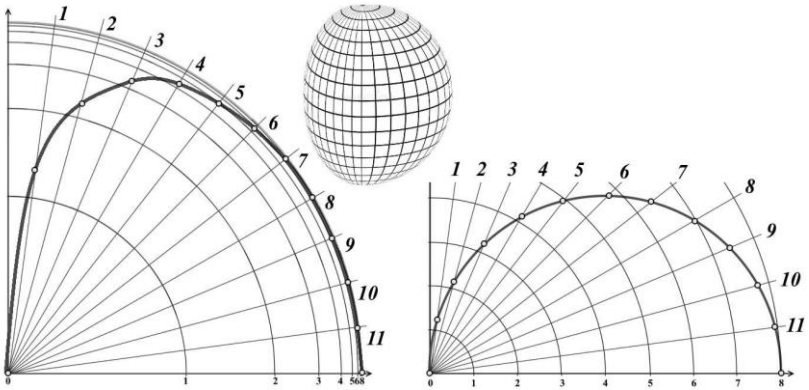


Рис.8. Сфера в пространстве L^3 отрицательной кривизны Лобачевского. Справа: I–ый квадрант сечения сферы в плоском пространстве. Слева: перенос по точкам сечения в I–ый квадрант "Сферы Лобачевского".

Очевидно, при обратном переносе по точкам описанной выше евклидовой сферы из сферы Лобачевского в пространство погружения мы будем видеть её неравномерно вытянутой, деформированной.

Гиперкуб гиперболический

Мы показали возможную реализацию трёхмерного пространства отрицательной кривизны, пространства Лобачевского, и показали несколько объёмных тел в этом пространстве. Возникает естественное предположение о возможности дальнейшего расширения этого пространства,

увеличения числа его измерений. В трёхмерном пространстве Евклида изобразить объекты четырёхмерного пространства практически невозможно. Например, имеющиеся изображения четырёхмерного куба, тессеракта выглядят весьма отвлечённо. Тем не менее, его изображение в литературе и в фильмах встречается довольно часто. Исходя из этого, мы делаем естественное предположение, что такой же тессеракт можно изобразить и в сфере Лобачевского. Скелетный вариант такого *гиперболического* гиперкуба можно изобразить в следующем виде:

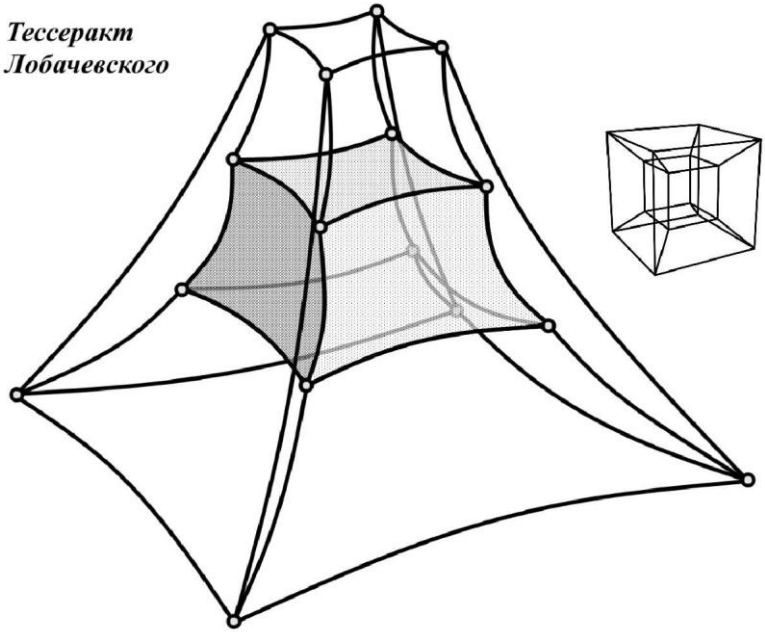


Рис.9. Гиперкуб, тессеракт в *трёхмерном* пространстве Лобачевского отрицательной кривизны L^3. Грани гиперкуба – это геодезические *поверхности*. Нижняя грань гиперкуба выпуклая и расположена ближе к центру сферы. Верхняя грань ближе к абсолюту, границе сферы. Внутренний куб выделен для наглядности

Заключение

Сфера Лобачевского является *симуляцией* трёхмерного пространства отрицательной кривизны L^3. Формально она содержит в себе всё бесконечное пространство, всю соответствующую ему Вселенную. Однако рассмотренная сфера – это *деформированное*, *искажённое* пространство, которое реально существовать не может, также как, согласно "мягкому" замечанию Гильберта, не удаётся осуществить целиком и *плоскость* отрицательной кривизны. Приведённые выкладки и подобные им следует рассматривать просто как математическую игру, своеобразную геометрическую престидижитацию.

В пространстве сферы Лобачевского можно осуществить традиционный эквиугловой перенос вектора по замкнутому контуру. В этом случае вектор уже не нужно рассматривать как элемент *касательного* пространства, теперь он имеет вполне определённое собственное *пространственное* направление. При возвращении вектора в исходное положение его направление в общем случае будет иным. Например, если произвести перенос по контуру грани тетраэдра или куба, то вектор, всегда ортогональный к грани, при возврате в исходную точку совпадёт с исходным, поскольку все векторы, ортогональные грани, направлены в сторону центра соответствующей геодезической поверхности, сферы.

Наряду с диском Пуанкаре и сферой Лобачевского можно рассмотреть аналогичные элементы в плоском пространстве и в пространстве положительной кривизны [85].

14.11.2021

Трехмерность бытия и теоремы Ферма и Пифагора

В литературе можно встретить многочисленные рассуждения о многомерных мирах, в том числе упоминания пространства-времени Минковского – Эйнштейна. При этом зачастую уточняют, что именно время является четвертым измерением. Но измерение ли оно? Является ли время одним из измерений четырехмерного мира: x, y, z, t? В соотношениях специальной теории относительности время входит в уравнение:

$$\mathbf{ds^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Не слишком ли сложно оно соотносится с тремя другими? Как видим, время присутствует в уравнении в своем, отличном от пространственных координат виде. Время не обладает характеристиками x, y, z. Это нечто иное, совершенно особенное.

Рассмотрим последовательно первые варианты мерности мира от нулевого до четвертого. Предположим, что существует ноль-мерный мир. Это мир, в котором нет ни одного измерения. Очевидно, мир этот представляет собой точку. Разумеется, все его объекты являются точками с такими же нулевыми измерениями. Теперь добавим первое измерение – x. Это измерение возникает при движении точки: образуется линия. То есть 1-мерный мир является линейным миром. Все объекты этого мира либо точки, либо отрезки линии. Если "сдвинуть" линию по новой координате – y, мы получим 2-мерный мир. Этот мир всем нам хорошо знаком, с ним нам приходится иметь дело на чертежах, рисунках, в книгах, газетах, на экранах мониторов, телевизоров. Перейти от этого мира к нашему бытию можно, сдвинув плоскость по новой координате – z. Как видим, переход от одного мира к другому, большей мерности осуществляется простым смещением этого мира по

дополнительной, вновь введенной координате. Следовательно, следует ожидать, что переход к миру следующей, четверной мерности можно также осуществить смещением нашего объемного, пространственного мира по какой-то новой координате. Очевидно, на эту роль время вполне может подойти. Однако у времени уже есть своя, отличная от пространства единица измерения. Это уже отклонение от принятой методики. Поэтому попробуем найти если не новую пространственную координату, то, по крайней мере, не худшую, чем время.

В интегральной форме линия, плоскость, пространство – это результаты последовательного интегрирования. А если попробовать взять четвертый интеграл? По логике он более всего подходит на роль четвертого измерения. А какую переменную выбрать? Этот интеграл очень напоминает вычисление массы. То есть результатом интегрирования вполне могла бы быть масса, а четвертой координатой, соответственно, плотность. Если же в качестве переменной выбрать время, то результат чуть более отвлеченный. С другой стороны, можно продолжить аналогию со смещением: что образуется при движении объема по четверной, неведомой нам координате? Такая трактовка четырехмерности тоже несколько искусственная, отвлеченная. Двигаясь по оси плотности, мы в нашем случае просто получим объемные тела различной массы. Посмотрим, как соотносятся миры друг с другом:

Линия ограничена на 1 меньше - мерными объектами – точками.

Поверхность ограничена на 1 меньше – мерным объектом – линией.

Объем ограничен на 1 меньше – мерным объектом – поверхностью.

Вещественный объект ограничен на 1 меньше – мерным объектом – объемом.

То есть выбор в качестве четвертой мерности мира оси плотности более нагляден, чем выбор оси времени. Хотя такая трактовка четвертого измерения и является достаточно надуманной, но она позволяет высветить не меньшую надуманность трактовки времени как четвертого измерения. Поэтому вполне оправданы высказывания вида: нет смысла говорить, что "мы живем в 4х-мерном пространстве-времени, да еще с неевклидовой метрикой" – это будет пустое словоблудие.

Интересную связь можно обнаружить между 3-мерностью бытия и двумя теоремами: теоремой Ферма и теоремой Пифагора. Великая теорема Ферма, по имеющимся сообщениям в печати, наконец-то доказана. Однако можно предложить иной взгляд на эту теорему. Если присмотреться к уравнению известной теоремы Пифагора, то можно заметить, что оно является одним из решений уравнения Ферма:

$$\mathbf{a^n + b^n = c^n \quad ==> \quad a^2 + b^2 = c^2 \quad ==> \quad 3^2 + 4^2 = 5^2}$$

Но помимо этого решения есть еще несколько уравнений внешне похожих на уравнение Ферма и теорему Пифагора. При этом явно просматривается "принадлежность" этих уравнений к соответствующему n-мерному миру. Назовем ферма-решением целочисленные решения, когда все слагаемые в уравнении и сам показатель степени являются порядковыми числительными. Рассмотрим ферма-решения теорем Пифагора для каждого из этих миров. Очевидно, что наименьшая мерность мира – ноль. Поэтому уравнение:

$$\mathbf{1^0 = 2^0}$$

можно назвать ферма-решением теоремы Пифагора для 0-мерного мира (соответственно, теоремы Ферма для

0-мерного мира). Формулировка этой теоремы будет звучать примерно так: "ноль-сумма точек равна точке" или "размеры всех точек равны". Суммы и собственно слагаемых нет, поэтому такая сумма названа "ноль-суммой". Как видим, слагаемые и степень – это 0, 1, 2.

Для одномерного мира, мира с одной единственной размерностью можно привести следующее ферма-решение уравнения теоремы Пифагора:

$$\mathbf{1^1 + 2^1 = 3^1}$$

Звучать эта теорема, очевидно, должна следующим образом: "сумма длин отрезков равна суммарному отрезку". Здесь также слагаемые и степень – порядковые целые числа: 1, 2, 3.

Одним из решений всем известной теоремой Пифагора, попадающим под определение ферма–решения, является уравнение:

$$\mathbf{3^2 + 4^2 = 5^2}$$

Звучать она в нашем контексте, очевидно, должна следующим образом: "сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на его гипотенузе". Это теорема Пифагора для плоского 2-мерного мира. Порядковые целые числа в решении уравнения – это 2, 3, 4, 5. Наконец, для объемного 3-мерного мира можно сформулировать еще одну теорему Пифагора, ферма–решение (соответствующей для этого мира теоремы Ферма) которой описывается уравнением:

$$\mathbf{3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3}$$

Звучать она должна следующим образом: "сумма объемов кубов, построенных на гранях параллелепипеда, равна объему куба, построенного на его диагонали". Очевидно, это последний "набор" порядковых целых чисел: 3, 4, 5, 6 ферма–решений. Другие автору статьи найти не

удалось. То есть для значений показателя степени более 3 не существует соответствующих уравнений и соответствующих им теорем Пифагора (и теорем Ферма).

Эти уравнения отражают закономерности природы, в которой мы живем. Поэтому можно предположить, что 4-мерный мир природой "не предусмотрен".

Данная статья в несколько измененном виде публиковалась автором в альманахе Захарова В.М. "Не может быть" N6, 1997 г. (название альманаха не точное, приведено по памяти)

Литература

1. Аникин Е. Модели геометрии Лобачевского, URL: https://elementy.ru/problems/1333
2. Blau M. Lecture notes on General Relativity \\ Albert Einstein Center for Fundamental Physics Institut fur Theoretische Physik Universitat Bern, CH-3012 Bern, Switzerland, 2017, URL: http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html
3. Carroll S. Spacetime and geometry. An Introduction to General Relativity. University of Chicago, Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley, ISBN 0-8053-8732-3 (hardcover)
4. Carroll S.M. Lecture Notes on General Relativity, arXiv:gr-qc/9712019v1 3 Dec 1997

5. Ekhammar S., Erkensten D., Lassila M., Nilsson T. From Black Holes to Wormholes in Higher Spin Gravity. 2+1-dimensional gravity in a Chern-Simons formulation. Department of Physics, CUT, Gothenburg, Sweden 2017
6. Gerard 't Hooft Introduction to General Relativity. Institute for Theoretical Physics, Utrecht University and Spinoza Institute, the Netherlands, 2012, URL: https://webspace.science.uu.nl/~hooft101/lectures/genrel_2010.pdf
7. Hendry M. An Introduction to General Relativity, Gravitational Waves and Detection Principles. University of Glasgow, UK, 2007
8. Marolf D. Notes on Relativity and Cosmology. Physics Department, Syracuse University, 2003, URL: https://ru.scribd.com/document/38274054/Relativity-and-Cosmology-Notes
9. Ryder L. Introduction to General Relativity. University of Kent, UK. Cambridge University Press, New York, 2009
10. Schutz B.F. A First Course in General Relativity. Second Edition. Max Planck Institute for Gravitational Physics. Cambridge University Press, New York, 2009
11. Straumann N. General relativity : with applications to astrophysics / Norbert Straumann. - Berlin [etc.]: Springer, cop. 2004. - xii, 674 с. : ил., портр.; 25 см
12. Wald R.M. General relativity. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984. URL: https://www.pdfdrive.com/general-relativity-r-waldpdf-e19758319.html
13. Алгебраические решения для дисков Пуанкаре, URL: https://answer-id.com/ru/70271158
14. Александров П.С. Что такое неэвклидова геометрия. – М.: Изд. академии пед. наук РСФСР, 1950.

15. Беллони Л., Рейна Ч. Прецессия Томаса. Подход Зоммерфельда. В сборнике: Эйнштейновский сборник, 1984 – 1985: Сб. статей. – М.: Наука, 1988.
16. Бергман П. Загадка гравитации \\Перевод с английского В.А.Угарова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969
17. Бергман П.Г. Введение в теорию относительности, с предисловием А. Эйнштейна \\Пер. с анг. П. Кунина и И. Таксара, под редакцией Б. Л. Гинзбурга. – М.: Гос. изд. иностранной литературы, 1947
18. Бескин В.С. Гравитация и астрофизика. – М.: Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН. Учебно-Научный Комплекс, 2007
19. Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия, - М.: Мир, 1985. - 400 с.
20. Богородский А.Ф. Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. Изд-во Киевского университета, 1962 г.
21. Введение в общую теорию относительности, ее современное развитие и приложения : [учеб. пособие] / С. О. Алексеев, Е. А. Памятных, А. В. Урсулов, Д. А. Третьякова, К. А. Ранну; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. - Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. - 380 с. ISBN 978-5-7996-1584-0
22. Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. \\ Пер. с анг. Н. Мицкевича. Под редакцией проф. Д. Иваненко. – М.: Изд. иностранной литературы, 1962.
23. Вейль Г. Пространство. Время. Материя. Лекции по общей теории относительности: Пер. с нем. Изд. 2-е, испр. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 456 с.
24. Вергелес С.Н. Лекции по теории гравитации. Учебное пособие. - М., МФТИ, 2001.- 428с.

25. Владимиров Ю.С. Классическая теория гравитации: Учебное пособие. — М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009, 264 с.
26. Гильберт Д. "Основания геометрии", пер. с 7-го немецкого издания И.С.Градштейна, Москва – Ленинград, ОГИЗ, Гос. изд. тех.-теор. лит-ры, 1948 г.
27. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. - М.: Издательство ЛКИ, 2008. - 552 с., цв. вкл.
28. Гравитация и относительность. Под редакцией Х. Цзю и В. Гоффмана. Пер. с анг. Д.В.Белова и И.В.Мицкевича под редакцией А.З.Петрова. - М.: Изд. "Мир", 1965 г.
29. Гуревич Л.Э., Чернин А.Д. Общая теория относительности в физической картине мира. Гравитация, космология, космогония, М.- "Знание", 1970, 62 стр.
30. Евклид "Начала", книги I-VI, пер. с греч. и комментарии Д.Д.Мордухай-Болтовского, ОГИЗ, Гос. изд. тех.-теор. лит-ры, Москва – Ленинград, 1950 г.
31. Зельдович Я.Б., Блинников С.И., Шакура Н.И. Физические основы строения и эволюции звезд, МГУ, 1981
32. Зельманов А.Л., Агаков В.Г. Элементы общей теории относительности. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
33. Иваненко Д.Д, Сарданашвили Г.А. Гравитация / Отв. ред. П.И.Фомин. Изд. 5-е. – М.: Издательство ЛКИ, 2012, 200с.
34. Изометричные поверхности, Википедия, URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Изометричные_поверхности
35. Катанаев М.О. Лекции по общей теории относительности. Математический институт имени В. А. Стеклова Российской Академии Наук, 2018 г. URL: http://www.mathnet.ru/supplement/conf/1354/lecture10.pdf

36. Кауфман Уильям Дж. Космические рубежи теории относительности. М.: "Мир", 1981, 352 с.
37. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966 г., 648 стр. с илл.
38. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек, Наука, 2006 г.
39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. П. Теория поля. – 8-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 536 с. - (Т. II).
40. Лобачевского Геометрия, Научная библиотека избранных естественно-научных изданий, научная-библиотека.рф, URL: http://www.sernam.ru/book_e_math.php?id=66
41. Мёллер К. Теория относительности. Изд. 2-е. Пер. с англ. Под ред. проф. Д. Иваненко. М., Атомиздат, 1975, 400 с.
42. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация, т.1-3. – М.: "Мир", 1977
43. Никулин В.В., Шафаревич И.Р. Геометрии и группы. – М.: Наука, 1983, – 240 с.
44. Новиков И.Д. Эволюция Вселенной, – Москва: "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
45. Об истинных размерах черных дыр на пальцах, страница пользователя sly2m на livejournal, URL: http://sly2m.livejournal.com/660502.html?thread=12401942
46. Параллельные прямые, Википедия, URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Параллельные_прямые
47. Параллельные прямые, Математический справочник, URL: http://dict.scask.ru/index.php?id=1177

48. Параллельные прямые, Математический справочник, URL: http://dict.scask.ru/index.php?id=1177
49. Паули В. Теория относительности: Пер. с нем. и англ. – 3-е изд., испр./Под род. В. Л. Гинзбурга и В. П. Фролова,— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. (Б-ка теор. физики). – 328 с - ISBN 5-02-014346-4.
50. Пенроуз Р. Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики: Пер. с англ. / Общ. ред. В.О.Малышенко. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.
51. Пенроуз Р. Путь к реальности или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель. \\ Пер. с анг. А.Р.Логунова и Э.М.Эпштейна, R&C, Москва, Ижевск, 2007
52. Петров А.Н. Гравитация. От хрустальных сфер до кротовых нор. Фрязино: "Век 2", 2013. – 320 с.
53. Попов А.Г. Псевдосферические поверхности и некоторые задачи математической физики, МГУ им. М. В. Ломоносова, Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 227—239. © 2005, Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом "Открытые системы"
54. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.-Л., ГИТТЛ, 1950
55. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М., "Наука", 1967.
56. Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии (С комментарием Г. Вейля.) Пер. с немецкого В. Л. Гончарова //Классики естествознания – Математика, Механика, Физика, Астрономия. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей. - М.: ГИТТЛ, 1956.
57. Сажин М.В. Теория относительности для астрономов. ГАИШ, Москва

58. Серединный перпендикуляр, Википедия, URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Серединный_перпендикуляр
59. Синг Дж.Л. Общая теория относительности. \\ Пер. с анг. Б.Т.Вавилова. Под редакцией А.З.Петрова. – М.: Изд. иностранной литературы, 1963.
60. Тайсон Н.Д., Стросс М.А., Готт Д.Р. Большое космическое путешествие. Пер. на рус. ООО Издательство "Питер", 2018
61. Тейлор Э.Ф., Уилер Дж.А. Физика пространства и времени, пер. с анг. Н. В. Мицкевича. Изд. второе, доп. – М.: Мир, 1971, – 320 с.
62. Торн К.С. Черные дыры и складки времени: Дерзкое наследие Эйнштейна. Перевод с англ. под ред. чл.-корр. РАН В.Б. Брагинского. – М.: Изд. физ.-мат. лит-ры, 2007, 616 с.
63. Три модели плоскости Лобачевского. Математический институт им. В.А.Стеклова. URL: https://etudes.ru/models/lobachevskian-plane-models/
64. Фейнман Р.Ф., Мориниго Ф.Б., Вагнер Фейнмановские лекции по гравитации. \\ Под редакцией Б.Хатфилда. Введение Дж.Прескилла и К.С.Торна. Пер. с анг. д.ф.-м.н. А.Ф.Захарова, Москва, "Янус-К", 2000
65. Фридман А.А. Мир как пространство и время. Изд. второе. - М.: Изд. "Наука", 1965 г.
66. Хокинг С. Particle Creation by Black Holes, 1975
67. Хокинг С., Пенроуз Р. Природа пространства и времени. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000, 160 стр., URL: http://sceptic-ratio.narod.ru/po/kn4.htm
68. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: "Мир", 1977.

Публикации автора

69. Вращение эллипса, Самиздат, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/rotatellips.shtml
70. Динамические диаграммы Минковского на примере обмена световыми сигналами, Самиздат, 2014, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/ddm-light.shtml
71. Динамические диаграммы Пенроуза – сигнализация в прошлое, Самиздат, 2016, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/dsl39.shtml
72. Динамические диаграммы Пенроуза, 2016, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/dp06.shtml
73. Иллюзия кривизны. Самиздат, 2023, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/illusio.shtml
74. Парадоксы параллельности, Самиздат, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/paraldox.shtml
75. Перенос вектора на поверхности отрицательной кривизны. Диск Пуанкаре, Самиздат, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/diskpuank.shtml http://lit.lib.ru/p/putenihin_p_w/diskpuank.shtml
76. Показательная функция для 2м-диаграммы Пенроуза, 2019, URL: http://samlib.ru/editors/p/putenihin_p_w/exp33.shtml
77. Пространственное линзирование, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/linza.shtml
78. Путенихин П.В. Диаграммы Пенроуза. Анализ и критика. — Саратов: "АМИРИТ", 2017. – 176 с., цв. илл., URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/penrose_diag.shtml https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42733192
79. Путенихин П.В. Логические основания многомерных пространств. — Саратов: "АМИРИТ", 2018. – 396 с., цв. илл., URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42690781

80. Путенихин П.В. Парадокс близнецов в специальной, общей и тахионной теориях относительности. — Саратов: "АМИРИТ", 2019. – 230 с., илл.
81. Путенихин П.В. Геометрия искривлённых пространств, Самиздат, 2023, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/geospace.shtml http://lit.lib.ru/p/putenihin_p_w/geospace.shtml
82. Тайна третьего постулата, 2012, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/postulat.shtml
83. Тороподобные поверхности, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/tor.shtml .
84. Трёхмерное пространство отрицательной кривизны. Сфера Лобачевского, Самиздат, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/sphelobach.shtml
85. Трёхмерное пространство положительной кривизны. Диск и шар Римана, Самиздат, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/spheriman.shtml
86. Феномен конуса, Самиздат, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/cone.shtml

Оглавление